Factorisation LU (Principe)

La méthode repose sur la décomposition de la matrice A :

$$A=L\,U$$

Où L est une matrice triangulaire inférieure et

U est une matrice triangulaire supérieure.

Le système Ax =b devient $L\,U\,X = b$

Soit en posant $U\,X = Y$

On aura $L\,Y = b$

Pour résoudre A x=b :

- On résout le système L Y=b pour trouver Y
- puis le système $U\,X=Y$ pour trouver X solution de A x=b

➔ déterminer les matrices L et U ,

Factorisation LU (détails)

En développant l'équation matricielle *A = L U*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{42} & l_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} l_{ik} u_{kj} \qquad \text{avec} \quad l_{ik} = 0 \; pour \; k > i \quad \text{et} \quad u_{kj} = 0 \; pour \; k > j,$$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{1k} u_{k1} = l_{11}u_{11} + l_{12}u_{21} + l_{13}u_{31} + l_{14}u_{41}$$
$$a_{32} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{3k} u_{k2} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} + l_{33}u_{32} + l_{34}u_{42}$$
$$a_{23} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{2k} u_{k3} = l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} + l_{23}u_{33} + l_{24}u_{43}$$

Déterminer U et L

$$
\begin{array}{rr}
u_{11} = (a_{11})/l_{11} & u_{22} = (a_{22} - l_{21}.u_{12})/l_{22} \\
l_{11} = (a_{11})/u_{11} & u_{23} = (a_{23} - l_{21}.u_{13})/l_{22} \\
u_{21} = (a_{21} - l_{21}.u_{11})/l_{22} & u_{24} = (a_{24} - l_{21}.u_{14})/l_{22} \\
l_{12} = (a_{12} - l_{11}.u_{12})/u_{22} & \vdots
\end{array}
$$

On a $n^2 + n$ inconnues

et seulement n^2 coefficients connus a_{ij}

→ fixer n paramètres dans les équations ci-dessus :

$$l_{ii_{i=1,..,n}} = 1$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{42} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} l_{ik} u_{kj}$$

avec $l_{ik} = 0 \ pour \ k > i$ et $u_{kj} = 0 \ pour \ k > j$ et $l_{ii_{i=1,..,n}} = 1$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{1k} u_{k1} = 1.u_{11} + l_{12}u_{21} + l_{13}u_{31} + l_{14}u_{41}$$

$$a_{32} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{3k} u_{k2} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} + 1.u_{32} + l_{34}u_{42}$$

$$a_{23} = \sum_{k=1}^{k=4} l_{2k} u_{k3} = l_{21}u_{13} + 1.u_{23} + l_{23}u_{33} + l_{24}u_{43}$$

$$u_{11} = (a_{11})/\mathbf{1}$$

$$\cancel{l_{11} = (a_{11})/u_{11}}$$

$$u_{21} = (a_{21} - l_{21}.u_{11})/\mathbf{1}$$

$$l_{12} = (a_{12} - \mathbf{1}.u_{12})/u_{22}$$

$$u_{22} = (a_{22} - l_{21}.u_{12})/\mathbf{1}$$

$$u_{23} = (a_{23} - l_{21}.u_{13})/\mathbf{1}$$

$$u_{24} = (a_{24} - l_{21}.u_{14})/\mathbf{1}$$

$$\vdots$$

Calcul alternatif

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj} \qquad i = 1,..,n \text{ et } j = i,..,n$$

$$l_{ij} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}\right]/u_{jj} \qquad j = 1,..,n \text{ et } i = j+1,..,n$$

Exemple: Résoudre par la méthode de Factorisation le système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Etape 1: Factorisation de la matrice *A=LU*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} =$$

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients des deux matrices,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Etape 2: Résolution du système

1) Le système $AX = b$ devient $LUX = b$, soit en posant

$Y = UX$, d'où on aura $LY = b$

On résout en premier le système $LY = b$ avec *L* matrice triangulaire inferieure

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ Admet la solution y_1=4; y_2=1; $y_3 = 1$ D'où $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) puis on résout $UX = Y$ avec U matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dont la solution est $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Remarque :

En décomposant la matrice A en : $A = LU$

Le déterminant de la matrice A est donné par la propriété :

$$\det A = \det(LU) = detL.detU$$

$$detA = \prod_{i=1}^{i=n} l_{ii}.\prod_{i=1}^{i=n} u_{ii}.$$

Exemple: Reprenons notre matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Et sa décomposition

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors, on déduit que

$$\det A = (1.1.1)(1.-1.-1) = 1$$

Algorithme de la factorisation LU

Pour i=1,2,….,n (calcul de la première ligne de U et la première colonne de U)

$$l_{ii} = 1$$

$$u_{1i} = a_{1i}$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

Fin

Pour i=2,3,…,n (calcul alternatif des lignes de U et colonnes de L)

Pour j=i,..,n

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}$$

Fin

Fin

Pour j=2,3,…,n

Pour i=j+1,..,n

$$l_{ij} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}\right] \Big/ u_{jj}$$

Fin

Fin

Pour déterminer les matrices L et U ,
on a les équations suivantes pour tout $r = 1, .., n$:

$$u_{rj} = \left[a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}\, u_{kj} \right] \Big/ l_{rr}\; pour\; j = r, .., n$$

$$l_{ir} = \left[a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}\, u_{kr} \right] \Big/ u_{rr}\; pour\; i = 1, .., r$$