Centre Universitaire de Mila
Institut des sciences et de la technologie
Première année Master Mathématiques Appliquées et fondamentales 2023/2024

Matière : *Équations aux différences*
Responsable : *Y. Halim*

Série de TD N° 1

Exercice 1 : (Bac 2020)

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont définies par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n \\ u_0 &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{n+1} &= 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n \\ v_0 &= 3 \end{cases} \tag{1}$$

Siot la suite $(w_n)_n$ définie par $w_n = v_n - u_n, \quad n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer w_0 et w_1 en fonction de α.
2. Montrez que $(w_n)_n$ est géométrique.
3. Donnez la forme de w_n en fonction de n et α, et donnez la valeur de α pour $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

Exercice 2 :

Donner la forme générale de la solution de l'équation aux différences suivant

$$x_{n+1} = a(n)x_n, \quad x_{n_0} = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{2}$$

où $a(n) \neq 0$, et $a(n)$ est un fonction réel définie sur $\mathbb{N}_0$.

Application : Trouvez les solutions des équations aux différences suivants :

(a) $x_{n+1} - 3^n x_n = 0, \quad x_0 = c.$

(b) $x_{n+1} - \frac{n}{n+1} x_n = 0, \quad n \geq 1, \quad x_1 = c.$

Exercice 3 :

Donner la forme générale de la solution de l'équation aux différences suivant

$$y_{n+1} = a(n)y_n + g(n), \quad y_{n_0} = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{3}$$

où $a(n) \neq 0$, et $a(n)$ et $g(n)$ sont deux fonctions réels définies sur $\mathbb{N}_0$.

Application : Trouvez les solutions des équations aux différences suivants :

(c) $x_{n+1} = 2x_n + 3^n, \quad x(1) = 0.5.$

(b) $x_{n+1} = (n+1)x_n + 2^n(n+1)!, \quad x(0) = 1.$

Exercice 4 : (Examen 2023)

Soit $\{J_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Jacobsthal définie par

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, \quad J_0 = 0, J_1 = 1.$$

1. Donner la forme de la solution (Formule de Benet) de la suite de Jacobsthal.
2. Montrer que

$$J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = -(-2)^n, \quad \forall n \geq 2. \quad \texttt{(L'identité de Cassini)} \tag{4}$$

$$J_{n+r}J_{n+1} - J_{n+r+1}J_n = (-2)^n J_r, \quad \forall n, r \geq 1. \quad \texttt{(L'identité d'Ocagne)} \tag{5}$$

Exercice 5 : (Interrogation 2022)

Résoudre les équations aux différences suivantes

$$x_{n+1} - \frac{n}{n+1}x_n = \frac{1}{n}, \quad x_1 = 2. \tag{6}$$

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = e^{nlog(3)}n^3 + 3^n n. \tag{7}$$