المحاضرة 4 :
عمليات الانحدار الذاتي وعمليات المتوسطات المتحركة (نماذج ARMA)

سوف يتم التطرق إلى:

- بعض المفاهيم الأساسية؛
- دالة الارتباط الاتي؛
- نماذج الانحدار الذاتي AR(p)؛
- نماذج الأوساط المتحركة MA؛
- النماذج المختلطة.

الصدمات العشوائية

- هي عبارة عن متتالية عشوائية مستقلة عن بعضها البعض، أي غير مرتبطة ولها نفس التباين ونرمز لها بالرمز ε_t
- تسمى أيضا بالشوشرة البيضاء (White Noise) ويمكن تلخيص خصائصها.

$$1.\ \varepsilon_t \rightarrow N(0, \delta^2)$$
$$2.\ E(\varepsilon_t) = 0$$
$$3.\ V(\varepsilon_t) = \delta^2$$
$$4.\ Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = 0$$

حيث h طول الفجوة.

معاملات التحويل

❖ معامل التأخير: نسمي معامل التأخير B المعروف كما يلي $By_t = y_{t-1}$

وفي الحالة العامة نكتب: $B^h y_t = y_{t-h}$

مثال:

$$B^h y_t = y_{t-h}$$
$$B^1 y_t = y_{t-1}$$
$$B^2 y_t = y_{t-2}$$

معاملات التحويل

- معامل التقدم: نسمي معامل التقدم F المعروف كما يلي $Fy_t = y_{t+1}$

وفي الحالة العامة نكتب: $F^h y_t = y_{t+h}$

مثال:

$$F^h y_t = y_{t+h}$$
$$F^1 y_t = y_{t+1}$$
$$F^2 y_t = y_{t+2}$$

دالة الارتباط الذاتي

- دالة الارتباط الذاتي هي دالة تقيس الارتباط بين السلسلة Yt ونفس السلسلة بتأخير قدره h؛ أي Yt-h ونرمز لها بالرمز ρ_h، ونكتب:

$$r_h = \rho_h = \frac{\sum_{t=h+1}^{n}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-h} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2}$$

خواص دالة الارتباط الذاتي

- دالة الارتباط الذاتي متناظرة حول الصفر؛ أي

$$\rho_{(h)} = \rho_{(-h)}$$

- دالة الارتباط الذاتي محصورة بين 1- و1،

$$-1 \leq \rho_{(h)} \leq 1$$

- لما h=0 فإن p=1
- تتحدد قيمة التأخير h حسب طول السلسلة، لما تكون السلسلة أقل من 150 مشاهدة فإن قيمة التأخير تكون :

$$\frac{n}{6} \leq h < \frac{n}{3}$$

- لما تكون أكبر من 150 مشاهدة فإن:

$$h = n/5$$

خواص دالة الارتباط الذاتي

- إذا كانت المعطيات شهرية أو فصلية نأخذ: $\boldsymbol{h = 24}$
- أما إذا كانت المعطيات يومية نأخذ قيمة التأخير $\boldsymbol{30 \leq h \leq 36}$
- في حالة المعطيات السنوية نأخذ: $15 \leq h \leq 20$

نماذج السلاسل الزمنية العشوائية المستقرة (ARMA)

تتكون تشكيلة النماذج العشوائية من نماذج الانحدار الذاتي (AR).
ونماذج المتوسطات المتحركة (MA) والنماذج المختلطة من نماذج الانحدار الذاتي ونماذج المتوسطات المتحركة (ARMA).
على هذا الأساس سوف يتم دراسة كل من:

- ❑ نماذج AR(p)؛
- ❑ نماذج MA(q)؛
- ❑ نماذج ARMA(p,q).

نماذج الانحدار الذاتي من الدرجة P

نسمي نماذج الانحدار الذاتي من الدرجة P كل نموذج مستقر والذي يحقق العلاقة الآتية:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots\ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

حيث أن الصيغة العامة كما يلي:

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t$$

- صدمات عشوائية؛
- معاملات حقيقية.

نماذج الانحدار الذاتي من الدرجة P

$$y_t - \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} = \varepsilon_t \ldots\ldots\ldots \rightarrow \forall t \in Z$$

بإدخال معامل التأخير B يمكن كتابة النموذج كما يلي:

$$y_t - \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} = \varepsilon_t \ldots\ldots\ldots \rightarrow \forall t \in Z$$

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = \varepsilon_t$$

$$y_t - \phi_1 B y_t - \phi_2 B^2 y_t - \cdots - \phi_p B^p y_t = \varepsilon_t$$

$$y_t \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right)_t = \varepsilon_t$$

عمليات الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى

تأخد هذه النماذج شكل معادلة انحدار لقيمة السلسلة عند الزمن t على قيمة السلسلة عند الزمن t-1 بالاضافة إلى الإضراب الحالي ε_t

إذن يمكن كتابة AR(1) كما يلي:

$$y_t = \varepsilon_t + \phi y_{t-1}$$

يمكن كتابة النموذج كما يلي:

$$\varepsilon_t = y_t(1 - \phi B) \rightarrow (1 - \phi B) = \psi(B)$$

$$\varepsilon_t = \psi(B) y_t$$

عمليات الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى

يمكن كتابة النموذج كما يلي:

$$\varepsilon_t = \psi(B) y_t$$

يسمى كثير الحدود $\psi(B)$
بمؤثر الانحدار الذاتي

دالة الارتباط الذاتي

يتحسب دالة الارتباط الذاتي من خلال العلاقة التالية:

$$\rho(K) = \phi^k, k = 1,2, \ldots |\phi| < 1$$

يعني هذا أن السلسلة تتذكر كل شيئ في الماضي ولها ذاكرة لانهائية، ولكن هذه الذاكرة تتناقص في شكل أسي بزيادة عمر المشاهدة؛ أي بزيادة الفاصل الزمني بين المشاهدة yt المشاهدة y(t-k)

عمليات الانحدار الذاتي من الرتبة 2

❖ يقال أن yt عملية انحدار ذاتي من الرتبة 2 إذا أمكن التعبير عنها في الصورة:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

❖ بإستخدام مؤثر الازاحة للخلف نجد:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2}$$
$$\varepsilon_t = y_t - \phi_1 B y_t - \phi_2 B^2 y_t$$
$$\varepsilon_t = y_t(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)$$

دالة الارتباط الذاتي AR(2)

يتحسب دالة الارتباط الذاتي من خلال العلاقة التالية:

$$\rho(1) = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}, |\phi_1| < 1$$

$$\rho(2) = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2}$$

$$\rho(K) = \phi_1 \rho(K - 1) + \phi_2 \rho(K - 2), K \geq 3$$

تتناقص في شكل أسي بزيادةK؛ أي تشبه دالة AR(1)

نماذج الأوساط المتحركة MA(q)

في نماذج المتوسطات المتحركة من الدرجة q، كل قيمة Yt معممة بمتوسط متزن لعنصر الخطأ العشوائي حتى المدة q؛ أي نكتب المتوسطات المتحركة كما يلي:

$$MA(1) = y_t = \varepsilon_t - \alpha_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$MA(2) = y_t = \varepsilon_t - \alpha_1 \varepsilon_{t-1} - \alpha_2 \varepsilon_{t-1}$$

....

$$MA(q) = y_t = \varepsilon_t - \alpha_1 \varepsilon_{t-1} - \alpha_2 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \alpha_q \varepsilon_{t-q}$$

عمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة 1

- يقال أن yt عملية متوسطات متحركة من الرتبة 1 إذا أمكن التعبيرعنها في الصورة:

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

- طبعا النموذج العام هو:

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

دالة الارتباط الذاتي

- يعبرعن دالة الإرتباط الذاتي لMA(1) كما يلي:

$$\rho(K) = \begin{cases} \dfrac{-\theta}{1+\theta^2}, K = 1 \\ 0, k = 2,3,\ldots \end{cases}$$

- بمعني أن دالة الارتباط الذاتي لMA(1) تنقطع فجأة بعد الفجوة الأولى ، قد نجد قيم أخرى تعطينا نفس دالة الارتباط الذاتي ولذلك تتكون لدينا مثلا نموذجان ل MA(1). نقبل فقط القيمة التي تحقق خاصية الانعكاس ؛ أي:

$$|\theta| < 1$$

عملية المتوسطات المتحركة من الرتبة 2

- يقال أن yt عملية متوسطات متحركة من الرتبة 2 إذا أمكن التعبيرعنها :

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

دالة الارتباط الذاتي

❖ يعبرعن دالة الإرتباط الذاتي لMA(2) كما يلي:

$$\rho(K) = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, k = 1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} k = 2 \\ 0, k = 3,4\ldots \end{cases}$$

❖ بمعني أن دالة الارتباط الذاتي لMA(2) تنقطع فجأة بعد الفجوة الثانية،
لذلك يقال أن عمليات MA(2) لها ذاكرة مقدارها 2.

دالة الارتباط الذاتي

- بمعني أن دالة الارتباط الذاتي لـ MA(2) تنقطع فجأة بعد الفجوة الثانية، لذلك يقال أن عمليات MA(2) لها ذاكرة مقدارها 2.
- طبعا بدون افتراض انعكاس النموذج يمكن أثبات أنه توجد أربعة نماذج تعطي نفس دالة الارتباط الذاتي لـ MA(2).
- حتي يتحقق الانعكاس لا بد من:

$$1)\theta_1+\theta_2<1\ldots\ldots2)\theta_2-\theta_1<1\ldots\ldots.3\Big)\,\theta_2<1$$

عمليات الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة

يقال أن Yt عملية انحدار ذاتي ومتوسطات متحركة من الرتبة (p,q) (اختصارا ARMA(p,q))إذا أمكن التعبير عنها:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

حيث هنا تنحدر قيمة السلسلة الزمنية عند الزمن t (yt) على مجموعتين من المتغيرات المفسرة؛ المجموعة الأولى وتعرف بمجموعة الانحدار الذاتي أو ماضي السلسلة، والمجموعة الثانية تعرف بمجموعة المتوسطات المحركة أو الاضطرابات الهادئة.

يمكن التعبير عن هذه العمليات بإدخال معامل التأخير كما يلي:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \ldots - \phi_p y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$y_t - \phi_1 B y_t - \phi_2 B^2 y_t - \ldots - \phi_p B^p y_t = \varepsilon_t - \theta_1 B \varepsilon_t - \theta_2 B^2 \varepsilon_t - \ldots - \theta_q B^q \varepsilon_t$$

$$y_t \underbrace{\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p\right)} = \varepsilon_t \underbrace{\left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q\right)}$$

$$\phi(B) Y_t = \theta(B) \varepsilon_t$$

عمليات ARMA(1,1)

- يقال أن yt عملية ARMA(1,1) إذا أمكن التعبير عنها :

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- هنا يصبح في هذه العملية:

$$\phi(B) = 1 - \phi B$$
$$\theta(B) = 1 - \theta B$$

دالة الارتباط الذاتي

- يعبرعن دالة الإرتباط الذاتي لARMA(1,1) كما يلي:

$$\rho(K) = \begin{cases} \dfrac{(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta}, k = 1 \\ \phi^{k-1}\rho(1), k = 2,3,\dots \end{cases}$$

- تعتمد إشارة (1)Pعلى إشارة المقدار $(\phi-\theta)$
- حيث يكون P(1) موجب إذا كان $\phi > \theta$

عمليات ARMA(1,1)

- يقال أن yt عملية ARMA(1,1) إذا أمكن التعبير عنها :

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- هنا يصبح في هذه العملية:

$$\phi(B) = 1 - \phi B$$
$$\theta(B) = 1 - \theta B$$