Centre universitaire Abdalhafid Boussouf Mila
Institut des Sciences et Technologie
Module : Équations différentielles
$3^{\text{ème}}$ année Maths, 2023-2024

# TD 3 : Systèmes différentielles Linéaires

**Exercice 1**
On considère le système suivant

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{2}(y_1 + e^t y_2), \\ y_2' = \dfrac{1}{2}(e^{-t} y_1 - y_2). \end{cases}$$

(a) Ecrire ce système sous la forme $(H)$.
(b) On pose $Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$. Montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de $(H)$.
(c) Déterminer la solution générale de $(H)$.
(d) Donner une matrice fondamentale $M$ de $(H)$
(e) Trouver la matrice résolvante $R(t, t_0)$ de $(H)$
(g) Utiliser autre méthode pour trouver la solution générale de $(H)$.

**Exercice 2**
1) En utilisant la méthode de l'exponentielle de matrice sur le système homogène, résoudre le système $Y' = A_1 Y + B_1(t)$ avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) En utilisant la méthode spectrale sur le système homogène, résoudre le système $Y' = A_2 Y + B_2(t)$ avec

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad et \quad B_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3**
Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}.$$

R de la matière : S. Bourourou