الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire
Abdelhafid boussouf Mila

المركز الجامعي
عبد الحفيظ بوالصوف – ميلة-

Institut des sciences et de la technologie
Département sciences et techniques

معهد العلوم والتكنولوجيا
قسم علوم و تقنيات

Cours
de
Vibrations et Ondes

Première Partie

Vibrations

Dr : Salim AOULMIT

2018

Table des matières

Introduction Générale

*L*e sujet des vibrations est l'étude des mouvements vibratoires (oscillatoire) des systèmes dynamiques. Un système dynamique est une combinaison de matière dont les parties sont capables de faire des mouvements relatifs. N'importe quel système possédant une masse et une élasticité capable de faire un mouvement de vibration. La masse est la constitution du système, et l'élasticité est due à la possibilité de mouvement relatif des partis constituant cette masse.

Les vibrations sont évidentes partout, un mouvement vibratoire est déclenché lorsque le système est déplacé de sa position d'équilibre en raison d'une énergie transmise au système par l'intermédiaire d'une source externe. Une force de stockage, ou une force conservatrice développée dans l'élément d'énergie potentielle (le ressort), ramène le système vers la position d'équilibre. Les buts principaux de l'étude des vibrations sont de déterminer l'effet de la vibration sur la performance des systèmes, la sécurité des systèmes et le contrôle de ses effets.

Ce cours, répond à la première partie du programme officiel de la matière «Vibrations et Ondes» enseignés en deuxième année pour les filières techniques. Ce présent cours permis aux étudiants d'acquérir les bases fondamentales sur le mouvement vibratoire.
Le cours est présenté en quatre chapitres et deux annexes. Le premier chapitre est consacré pour donner les définitions nécessaires et les concepts fondamentaux sur les vibrations. Le deuxième chapitre, traite les vibrations libres amorties et non amorties des systèmes à un degré de liberté. Les vibrations forcés (amorties et non amorties) à un degré de liberté sont présentées dans le troisième chapitre. Le quatrième chapitre présente le mouvement vibratoire des systèmes de deux degrés de libertés. A la fin de ce cours on présente une annexe sur le formalisme de Lagrange et une deuxième sur les équations différentielles linéaires du deuxième ordre.

Chapitre 1

Concepts fondamentaux sur les vibrations

1.1 Introduction

La plus part de nôtres activités quotidiennes se manifestent sur des vibrations cycliques :

- On écoute parce que le tombeur de l'oreille vibre avec un mouvement cyclique.
- On parle avec des vibrations cycliques des angines et de la langue.
- On marche avec des mouvements cycliques des pieds.
- Etc.…

Au début, les études concernant les mouvements vibratoires se concentrèrent sur le développement des théorèmes mathématiques pour comprendre les phénomènes physiques des vibrations. En revanche, les études récentes se concentrent sur les applications des vibrations dans le domaine de l'ingénierie, comme les moteurs mécaniques, les moteurs électriques, les engins, les bâtiments, les ponts…

L'origine des vibrations est due à l'existence des défauts dans l'équilibrage dans les moteurs ou dans les structures. Le déséquilibre peut être dû à une mauvaise conception, une mauvaise fabrication ou au vieillissement de certaines parties du système.

- Les vibrations dans le moteur d'un train peuvent entrainer des haussements des roues qui à son tour peuvent causer un déraillement.
- Les vibrations du moteur Diesel dans les engins provoquent un énorme bruit et des vibrations dans la croute de la terre ce qui, avec le temps, entrainent des endommagements dans les structures proches.
- Les vibrations dans les outils de découpage produisent des surfaces non homogènes.

- Les vibrations diminuent la durée de vie du moteur que ce soit mécanique ou électrique.
- Les vibrations dans les moteurs influent énormément sur la santé des utilisateurs.

Le grand problème des vibrations réside dans les structures, lorsque le battement naturel coïncide avec le battement d'une force extérieure(le phénomène de la résonance) ce qui entraine une amplification de l'amplitude produisant un énorme dégât dans les structures (le pont du Tacoma, 1 Juillet au 7 Novembre 1940). Pour ces raisons, les ingénieurs sont obligés de bien étudier les structures (ponts, constructions, immeubles,..) et améliorer l'équilibrage des machines mécaniques ou électriques. Malgré cela, les vibrations ont des applications importantes dans la vie quotidienne comme les machines de lavages…etc.

1.2 Définition des vibrations

Le mouvement qui se répète au cours du temps s'appelle un mouvement vibratoire ou un mouvement oscillatoire. Tout système mécanique ayant une masse et un élément flexible (un ressort par exemple) ou leur équivalence dans un système électrique (inductance, condensateur) peut faire des mouvements vibratoires. Dans la plupart des cas, ces systèmes ont un amortisseur pour les systèmes mécaniques ou une résistance pour les systèmes électriques. En général, on peut représenter un système vibratoire par les schémas suivants :

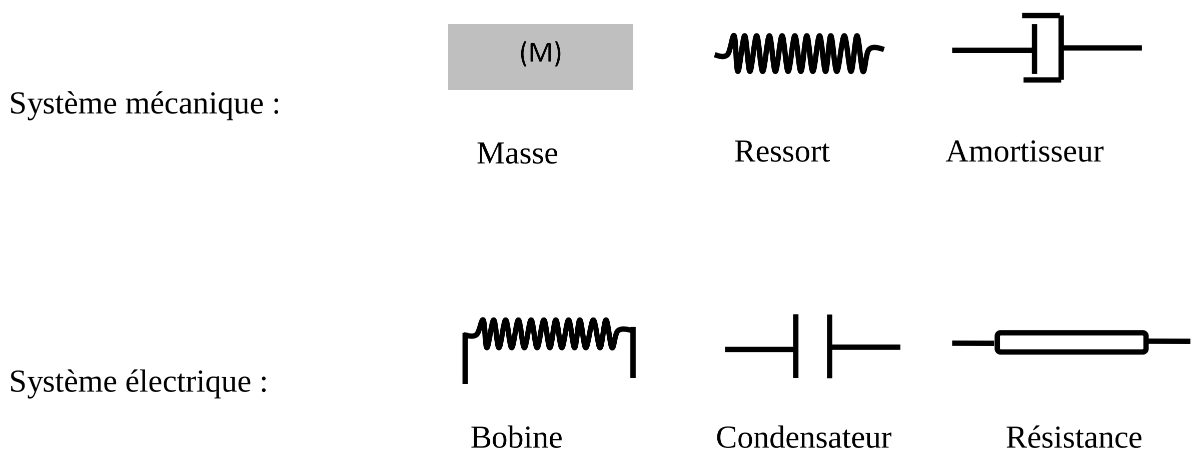


Figure 1. 1 : Représentation graphique des éléments du système vibratoire

D’une autre manière, on peut dire que tout système vibratoire contient trois moyens :

- **Système mécanique**
  - Moyen pour stocker l’énergie cinétique, c’est la masse.
  - Moyen pour stocker l’énergie potentielle, c'est le ressort.
  - Moyen de dissipation de l’énergie, c’est l’amortisseur.
- **Système électrique**
  - Moyen pour stocker l’énergie électrique, c’est le condensateur.
  - Moyen pour stocker l’énergie magnétique, c'est la bobine.
  - Moyen de dissipation de l’énergie, c’est la résistance électrique.

Pendant les vibrations (oscillations), l’énergie se transforme d’une forme à une autre : de l’énergie cinétique à l’énergie potentielle et vice versa dans un système mécanique ou de l’énergie électrique à l’énergie magnétique et vice versa dans un système électrique. L’exemple le plus simple représentant un système vibratoire mécanique est le pendule simple. Dans chaque oscillation, l’énergie se transforme de l’énergie potentielle à l’énergie cinétique et vice versa. Supposant qu'à l’instant initial la masse est à la position 1 (fig.1.2), l’énergie totale est sous la forme d’une énergie potentielle.

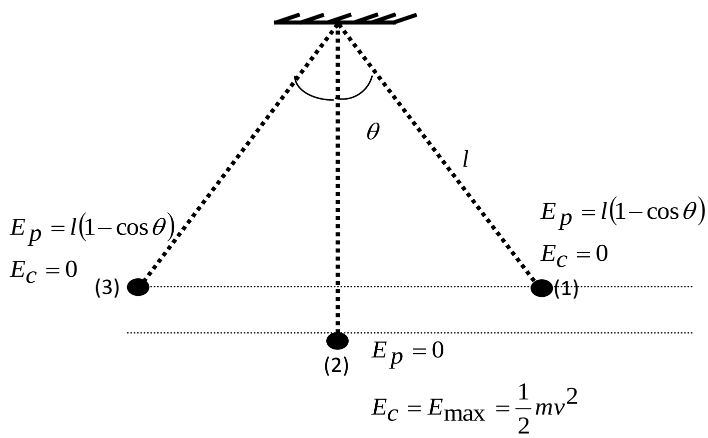


Figure 1. 2 : Transformation de l'énergie potentielle à l'énergie cinétique et vice versa dans les vibrations d'un pendule simple

On libère la masse, l'énergie cinétique augmente et l'énergie potentille diminue jusqu'à la transformation complète de l'énergie potentille en énergie cinétique à la position 2 (fig.1.2),la masse a fait un quart de cycle. A partir de la position 2, l'énergie potentille augmente et l'énergie cinétique diminue jusque la transformation complète en énergie potentille à la position 3 (la masse a fait un demi-cycle). Le retour de la masse à la position 1 avec le même processus, constitue un cycle complet. Dans le cas réel, durant le mouvement de la masse, une partie de l'énergie se communique avec le milieu extérieur. Cette partie est irrécupérable, donc le système perd de l'énergie dans chaque cycle.

1.3 Classification des vibrations

Les vibrations peuvent être classifiées sous plusieurs formes. On s'intéresse à la classification la plus commune qui range les vibrations dans trois catégories.

1.3.1 Vibrations libres et vibrations forcées

Après une perturbation initiale, un système vibratoire est laissé sans aucune action d'une force externe, les vibrations dans ce cas sont connues comme des vibrations libres. L'oscillation d'un pendule simple est un exemple de ce type de vibrations.

Si le système est soumis à une force extérieure au cours de toutes ces vibrations, les vibrations résultantes sont dites forcées. On peut prendre le pendule simple comme exemple si la masse est soumise à une force périodique extérieure.

1.3.2 Vibrations amorties et vibrations non amorties

Si l'énergie totale du système est conservée l'hors des vibrations (il n'y a pas de dissipation de l'énergie), ces vibrations sont dites non amorties. En revanche si le système perd de l'énergie au cours de ces vibrations (si l'on considère la résistance de l'air sur la masse du pendule simple dans l'exemple précédant), après certain temps la masse s'arrête à cause de la dissipation de l'énergie. Ces vibrations, sont dites vibrations amorties.

1.3.3 Vibrations régulières et vibrations non régulières

Si l'amplitude du mouvement vibratoire est connue à tout moment, les vibrations résultantes sont appelées régulières ou déterministes. D'une autre manière, c'est le mouvement vibratoire dont on peut prévoir la valeur de l'amplitude à n'importe quel moment. Dans le cas contraire, les vibrations sont dites non régulières ou non déterministes.

1.4 Nombre de degré de liberté

Le nombre minimal des coordonnées indépendantes nécessaires pour étudier un système vibratoire est appelé nombre de degré de liberté.

Exemples :

- **Pendule simple**

Le système de la figure 1. 3. peut être étudié (connaître la position de la masse m dans chaque instant) par la connaissance d'une seule coordonnée x ou y car elles sont liées par la relation $\boldsymbol{x^2+y^2=l^2}$. Connaitre l'une des deux coordonnées, ça veut dire que la deuxième est tirée directement par la relation précédente. On dit que les deux coordonnées ne sont pas indépendantes. L'étude de ce système nécessite une seule coordonnée, donc le système est à un degré de liberté.

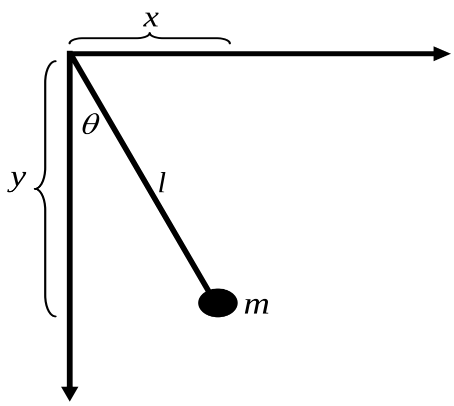


Figure 1.3 : Pendule simple

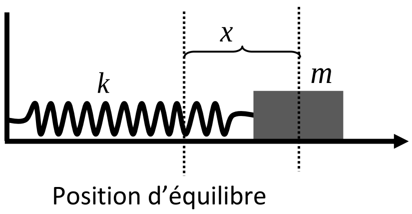


Figure 1.4 : Système masse-ressort

- **Masse ressort**

Pour connaitre la position de la masse dans chaque instant, il faut connaitre seulement l'abscisse x.L'étude de ce système nécessite donc une seule coordonnée, alors le système est à un degré de liberté.

- **Deux masses et deux ressorts**

Pour connaitre les positions des masses m_1 et m_2 dans chaque instant il faut connaitre les abscisses x_1 et x_2 (les deux coordonnées sont indépendantes, x_1 par exemple ; peut prendre des valeurs indépendamment des valeurs de x_2, l'étude de ce système nécessite deux coordonnées, donc le système est à deux degrés de liberté.

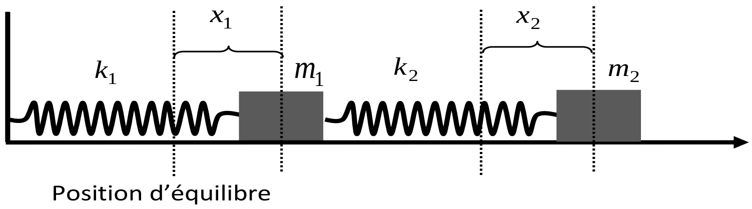


Figure 1.5 : Système à deux degrés de libertés, deux masses et deux ressorts

- **Masse ressort et pendule couplé**

Pour connaitre la position de la masse M reliée au ressort et la position de la masse m du pendule dans chaque instant, il faut déterminer l'abscisse x et l'angle θ. L'étude de ce système nécessite deux coordonnées, alors le système est à deux degrés de liberté.

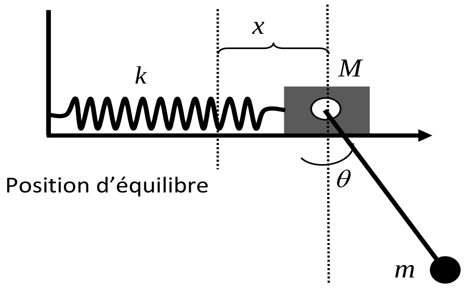


Figure 1. 6 : Système masse ressort et pendule couplés

1.5 Procédure d'analyse d'un système vibratoire

Dans le cas réel, presque la totalité des systèmes sont trop compliqués ainsi que les paramètres externes qui influent sur ces systèmes. Pour étudier ce genre de système, il faut suivre des étapes pour arriver à un modèle simple à étudié.

- Détermination des composants du système et les forces agissant sure ce système.

- Simplification du système réel(modèle physique), à un modèle plus simple dit modèle mathématique.
- Détermination de nombre de degré de liberté.
- Utilisation des approches mathématiques (petites angles, ...) pour assurer l'étude analytique.

Exemple(voir la figure 1.7)

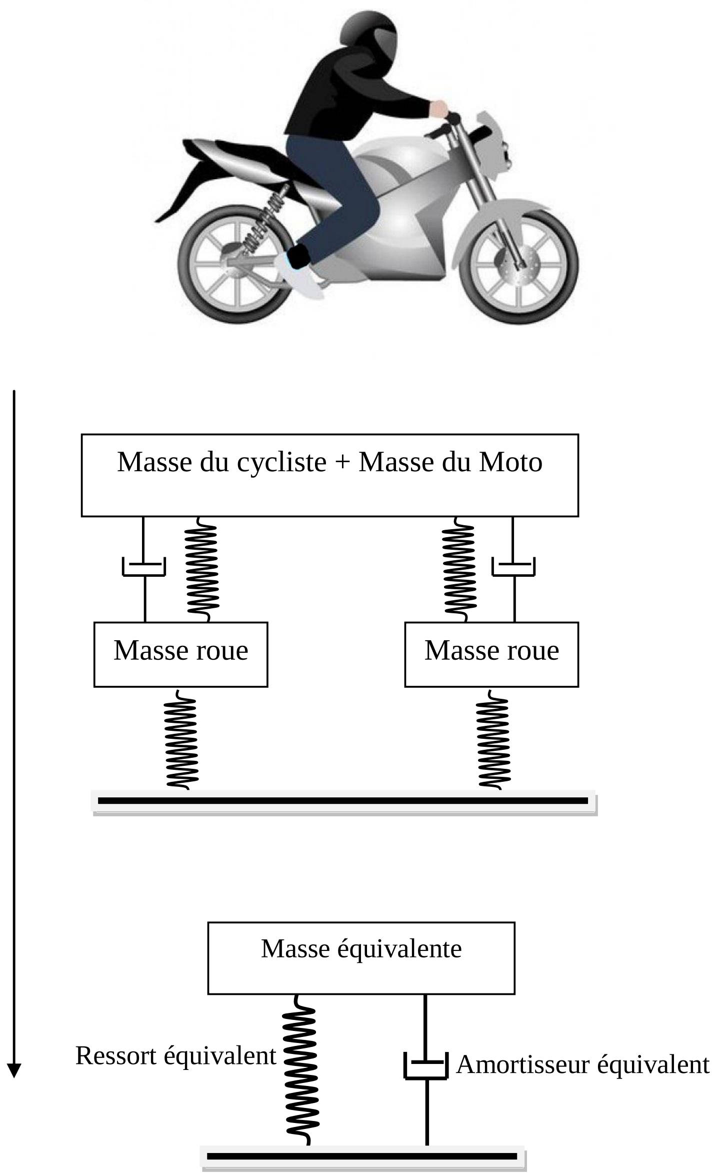


Figure 1.7 : Schéma illustre le passage du modèle physique au modèle mathématique (le model simple) [2].

1.6 Système mathématique (modèle simple)

La simplification du système vibratoire compliqué à un modèle simple représentant le cas réel s'effectue par la détermination du ressort équivalant de tous les ressorts existant ainsi que la masse équivalente de toutes les masses qui constituent le système. Dans ce qui suit nous allons donner des exemples simples pour arriver à comprendre le ressort équivalant et la masse équivalente.

1.6.1Ressort équivalant

Dans la pratique on trouve des ressorts en série et d'autres en parallèle.

a. Ressorts en parallèle

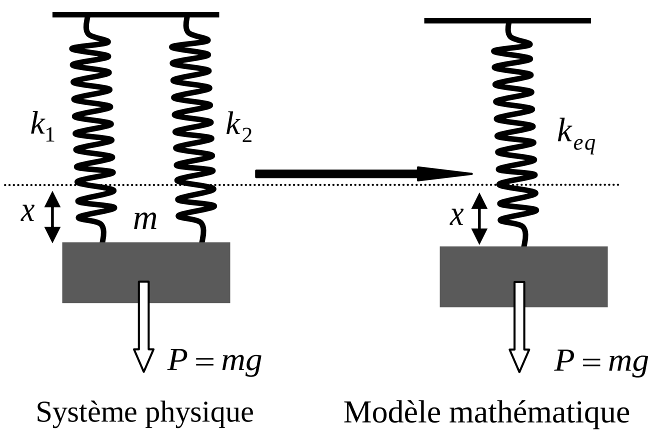


Figure 1. 8 : ressort équivalant à deux ressort en série dans un système masse ressorts

Les équations du système à l'équilibre s'écrivent comme suit :

Pour le système réel :

$$P = k_1 x + k_2 x \tag{1.1-a}$$

$$P = (k_1 + k_2)x \tag{1.1-b}$$

Pour le modèle mathématique :

$$P = k_{eq} x \tag{1.2}$$

A partir des relations (1.1), (1.2) on peut déduire la constante de raideur du ressort équivalent par la relation suivante :

$$k_{eq} = (k_1 + k_2) \tag{1.3}$$

Si le système est constitué de plusieurs ressorts en série, alors la constante de la raideur du ressort équivalent est donnée par :

$$k_{eq} = \sum_i k_i \tag{1.4}$$

b. **Ressorts en série**

La suspension de la masse m à l'extrémité libre des deux ressorts *k_1*et *k_1*causedes allongements *x_1*et *x_2*dans *k_1* et *k_1*respectivement. L'allongement total est $x_t = x_1 + x_2$

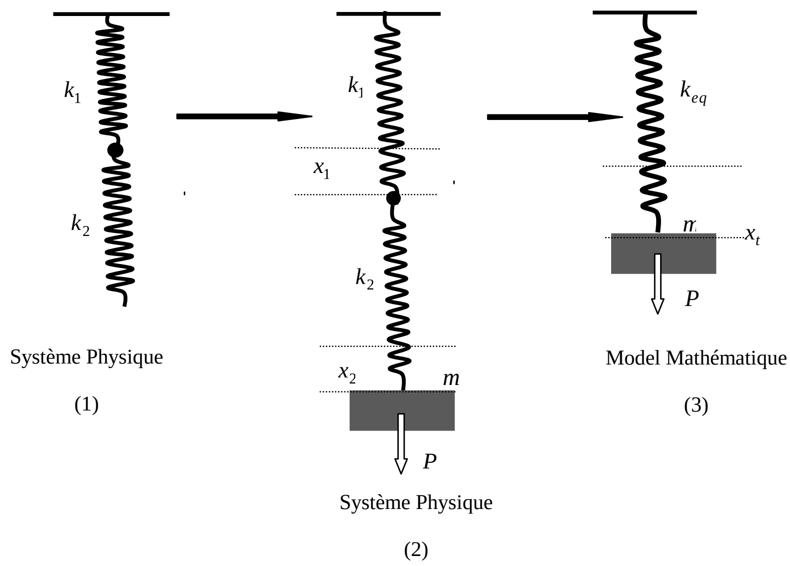


Figure 1.9 : Ressort équivalant d'un système mass-ressort à deux ressorts en série

A l'équilibre mécanique : Si on considère le système réel, on peut écrire ce qui suit :

$$P = k_1 x_1 \tag{1.5}$$

$$P = k_2 x_2 \tag{1.6}$$

Pour le modèle mathématique

$$P = k_{eq} x_t \tag{1.7}$$

À partir des relations précédentes, on peut écrire :

$$k_1 x_1 = k_{eq} x_t \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{k_{eq}}{k_1} x_t \tag{1.8}$$

$$k_2 x_2 = k_{eq} x_t \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{k_{eq}}{k_2} x_t \tag{1.9}$$

On somme les relations (1.8) et (1.9) et tenant compte de la relation $x_t = x_1 + x_2$

$$x_1 + x_2 = \frac{k_{eq}}{k_1} x_t + \frac{k_{eq}}{k_2} x_t \quad \Rightarrow \quad x_t = k_{eq}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) x_t$$

A la fin on trouve la relation qui donne la constante de raideur du ressort équivalent.

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{1.10}$$

Dans le cas général où le système est constitué de plusieurs ressorts en parallèle, la constante de la raideur du ressort équivalent peut être donnée comme suit :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_i \frac{1}{k_i} \tag{1.11}$$

1.6.2 La masse équivalente

a. Ressort avec une masse non négligeable

Dans certains cas (voitures, camions…) on ne peut pas négliger les masses des ressorts introduits dans la constitution des systèmes mécaniques. Pour simplifier l'étude, on cherche une masse équivalente du ressort qui l'on suppose suspendue à son extrémité, finalement le ressort est devenu de masse négligeable. La masse du ressort est m sa longueur est L, donc la masse linéique du ressort est donnée par $\frac{m}{L}$. La masse d'un élément s de longueur dl est donnée par $\frac{m}{L}dl$ .La vitesse des éléments constituant le ressort (points du ressort) sont linéaire avec la distance l. La vitesse de l'élément qu'est à l'extrémité fixe est nulle alors que la vitesse

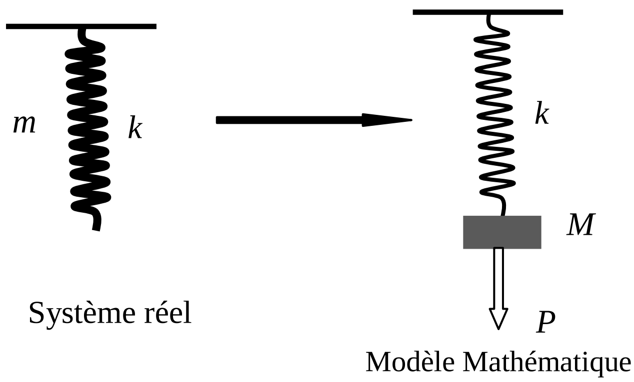


Figure 1.10 : Masse équivalente pour un ressort de masse non négligeable

de l'élément qu'est à l'extrémité libre $\dot{x}$ est maximale. La vitesse de l'élément dl peut être donnée comme suit :

$$\dot{x}_S(t) = \frac{l}{L}\dot{x}(t).$$

L'énergie cinétique T du ressort est égale à la somme de toutes les énergies de ses éléments et comme la distribution de la masse est continue alors la somme sera remplacée par une intégrale :

$$T = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{m}{L}dl\right)\left(\frac{l}{L}\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{L^3}\dot{x}^2\int_0^L l^2 dl \tag{1.12}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)\cdot\dot{x}^2 \tag{1.13}$$

Sachant que l'énergie cinétique du système équivalant (modèle mathématique) s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}m_{eq}\cdot\dot{x}^2 \tag{1.14}$$

Tenant compte des relations (1.13) et (1.14) on déduit ce qui suit :

$$m_{eq} = \frac{m}{3}. \tag{1.15}$$

- **Masse équivalente de trois masses**

Dans la plupart des cas pratiques, plusieurs masses apparues en combinaison. Pour rendre l'étude simple, elles doivent être remplacées par une seule masse équivalente. Pour illustrer cette supposition on donne un exemple de trois masses m_1, m_2 *et* m_3 attachées sur une barre de longueur l qui pivote autour d'un axe quelconque (figure 1.11).Supposant que les masses sont attachées à des distances x_1, x_2 *et* x_3 de l'axe de rotation.

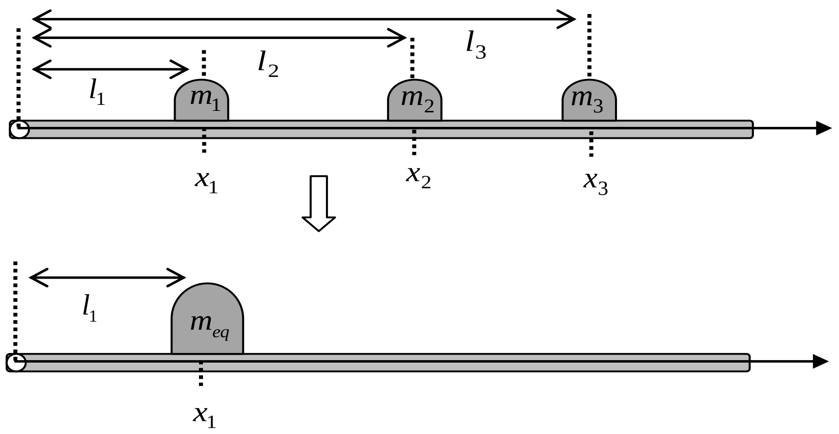


Figure 1.11 : Masse équivalente de trois masses m_1, m_2 *et* m_3 attachées sur une barre

On cherche la masse équivalente de ces trois masses supposées attachées à la place de m_1 (la masse équivalente attachée dans x_1). Pour simplifier l'analyse, on suppose que la barre pivote avec des petites vitesses angulaires. Dans cette approximation, on peut écrire les vitesses des masses en fonction de la longueur de la barre *l* par les relations suivantes,

- La vitesse de la masse m_2 : $\dot{x}_2 = \dfrac{l_2}{l}\dot{x}_1$
- La vitesse de la masse m_3 : $\dot{x}_3 = \dfrac{l_3}{l}\dot{x}_1$
- La vitesse de la masse équivalente m_{eq} : $\dot{x}_{eq}$

L'énergie cinétique du système réel est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 \tag{1.16}$$

L'énergie cinétique du modèle mathématique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 \tag{1.17}$$

A partir des deux relations précédentes, on peut écrire ce qui suit :

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 \tag{1.18}$$

Tant que la masse équivalente est supposée attachée à la place de la masse m_1 (c'est-à-dire à la distance x_1), la vitesse de la masse équivalente m_{eq} est égale à la vitesse de la masse m_1, c'est à dire $\dot{x}_{eq} = \dot{x}_1$. En l'introduisant dans l'équation (1.18), on trouve :

$$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 m_3 \tag{1.19}$$

1.7 Mouvement harmonique

Le mouvement qui se répète dans des temps égaux, s'appelle un mouvement périodique. Le plus simple mouvement périodique est le mouvement harmonique où l'amplitude reste constante (forces dissipatives sont négligeables).Le mouvement d'un point sur un trajet circulaire avec une vitesse angulaire constante et le mouvement d'une masse accrochée à un ressort sont des exemples qui représentent ce type le mouvement harmonique.

Le mouvement harmonique peut être représenté mathématiquement par le sinus ou le cosinus. Pour illustrer cette idée on schématise ou le mouvement d'une masse suspendue à un ressort (fig. 1.12) ou par le mouvement d'un point matériel qui se déplace autour d'un cercle (fig. 1.13).

- **Amplitude :** L'amplitude est l'écart maximal du système vibratoire par rapport à sa position d'équilibre (fig. 1.13).

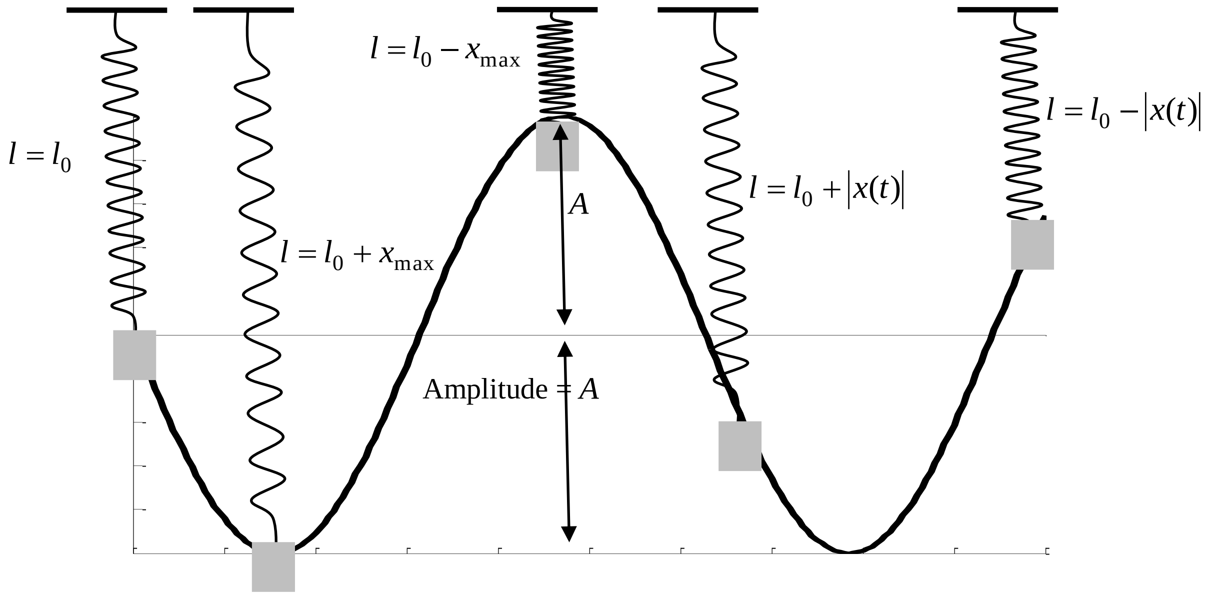


Figure 1.12 : Schéma illustre la représentation du mouvement harmonique par le sinus ou le cosinus.

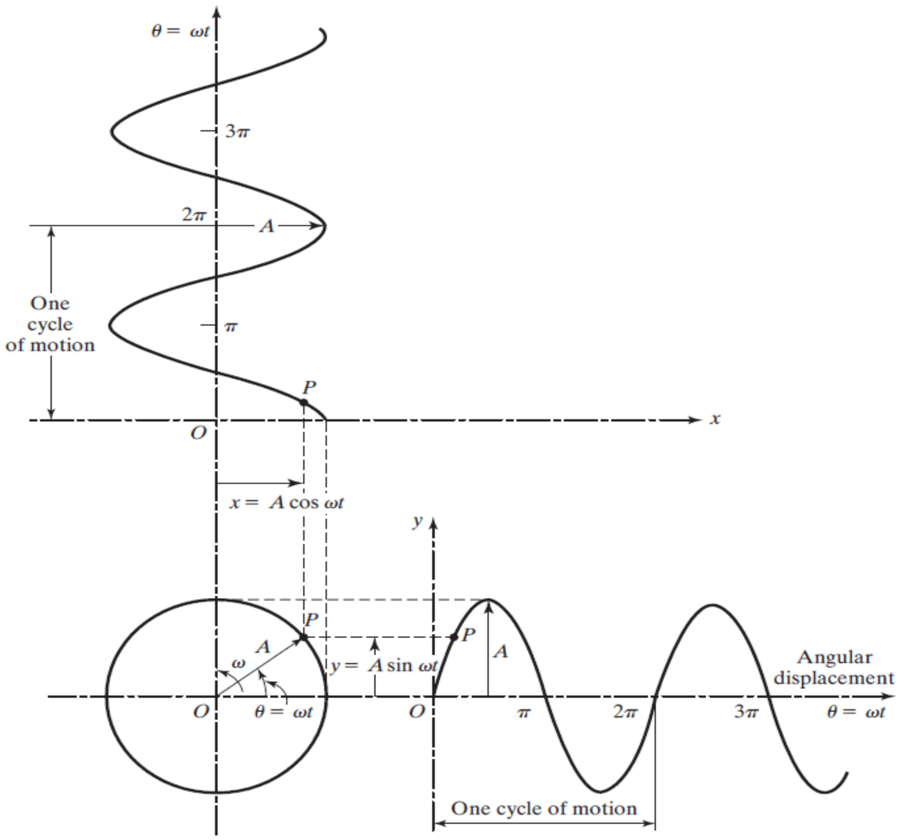


Figure 1.13 : Schéma illustre la représentation du mouvement harmonique par le sinus ou le cosinus [2].

- **Cycle :** le déplacement du système vibratoire de la position d'équilibre à la position extrême dans une direction puis le retour jusqu'à la position extrême dans la direction opposée, passant par la position d'équilibre, puis le retour à la position d'équilibre initial est appelé un cycle.
- **Période :** la période d'un mouvement vibratoire est le temps nécessaire pour que le système complète un cycle. L'unité du période T est la seconde s .

1.7.4 Représentation complexe du mouvement harmonique :

Un nombre complexe Z peut être représenté par un point dans le plan complexe, où le point Z(x, y) représente le nombre complexe Z=x + i y (fig : 1.14 a)

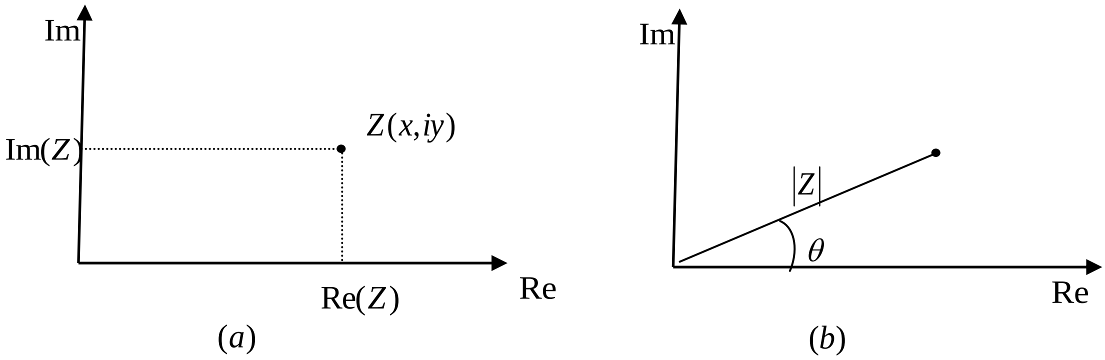


Figure 1.14 Représentation d'un nombre complexe.

L'amplitude du nombre complexe $|Z|$ est sa distance à l'origine. L'angle entre la ligne radiale et l'axe des réels fait un angle appelé l'argument de z ($\arg(Z)$)ou la phase de z (fig : 1.14 b).

Exemple : $Z = 2 + i3$

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3.6 \text{ , } \arg(Z) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31^\circ = 0.98 rad \text{ .}$$

On peut écrire le nombre complexe en fonction de l'amplitude et de la phase avec,

$$\mathrm{Re}(Z) = |Z|\cos(\theta), \quad \mathrm{Im} = |Z|\sin(\theta) \tag{1.20}$$

Alors

$$Z = \mathrm{Re}(Z) + i\,\mathrm{Im}(Z) = |Z|\cos(\theta) + i|Z|\sin(\theta) \tag{1.21}$$

En fin,

$$Z = |Z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \tag{1.22}$$

Nous avons, $i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \ldots$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

$$i\sin\theta = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \ldots$$

On peut écrire,

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + \theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots = e^{i\theta} \tag{1.23}$$

Alors le nombre complexe peut être écrit sous la forme la plus simple,

$$Z = |Z|e^{i\theta} \tag{1.24}$$

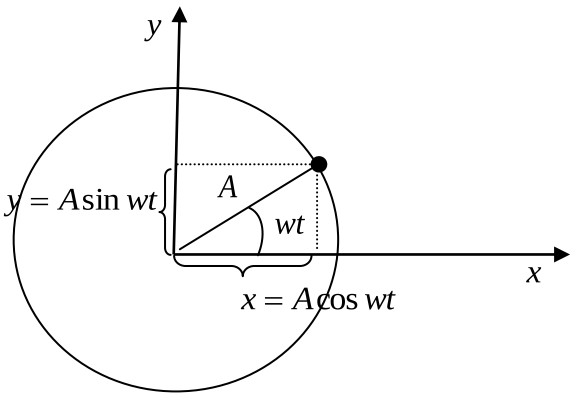


Figure 1.15 Mouvement circulaire d'un point matériel.

Considérons, dans le plan (x, y) un point se déplace dans le sens contraire des aiguilles d'une montre sur un cercle de rayon A avec une vitesse angulaire wt.

Les coordonnées de ce point correspondent au nombre complexe sont données par

$\mathrm{Re}(Z) = A\cos(\theta), \quad \mathrm{Im} = A\sin(\theta)$

Donc, le mouvement harmonique simple peut être donné par

$$Z = Ae^{iwt} \tag{1.25}$$

Dans l'étude du mouvement harmonique où on prend soit la partie réelle soit la parie imaginaire. Cette écriture est très utile pour étudier le mouvement harmonique. Elle est simple à dériver, à intégrer, à sommer …

Chapitre 2

Vibrations libres des systèmes à un degré de liberté.

2. 1Introduction

Tout système vibre loin d'excitations extérieures (le mouvement est dû à une perturbation initiale), les vibrations qu'ont suivies sont dites libres. Si le système nécessite une seule coordonnée pour son étude, le système est donc à un degré de liberté. Si le système ne perd pas de l'énergie, les vibrations sont dites non amorti, dans le cas contraire ils sont dites amortis.

Pour étudier les systèmes vibratoires il faut suivre les étapes suivantes :

- Etablir l'équation différentielle qui représente le mouvement.
- La résolution de l'équation différentielle.
- Déduire les paramètres physiques : Amplitude, Battement, Fréquence ...etc.

2.2 Vibrations libres non amorties

2.2.1 Vibration de translation non amortie

Plusieurs méthodes sont utilisées pour déterminer l'équation différentielle représentant le mouvement. Parmi ces méthodes on cite : la méthode de Newton, la méthode de Lagrange, la méthode d'énergie…etc.

Dans le présent cours, nous utilisons deux méthodes seulement : la méthode de newton et la méthode de Lagrange.

a- La méthode de Newton

Exemple 1 :

On prend le système composé d'une masse m suspendue à un ressort de raideur k et de longueur initiale l_0.

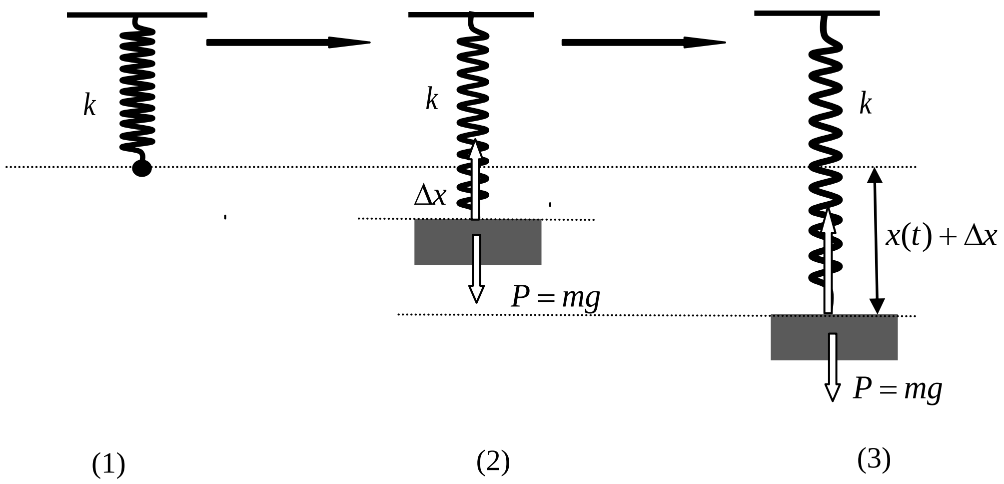


Figure 2.1 : Système masse-ressort à un degré de liberté

A l'équilibre mécanique (position 2) et selon le principe du Newton on peut écrire

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$mg - k\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = k\Delta x \qquad (2.1)$$

> *Remarque : on peut trouver expérimentalement la raideur d'un ressort avec cette expérience simple, où* $k = \dfrac{mg}{\Delta x}$

Dans la position 3, d'après la deuxième loi du Newton $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$ on peut écrire :

$$mg - k(x(t) + \Delta x) = m \cdot \gamma = m\ddot{x} \qquad (2.2)$$

$$mg - k\Delta x - k\,x(t) = m\,\ddot{x} \qquad (2.3)$$

À partir de la relation (2.1), on trouve ce qui suit :

$$-k\,x(t) = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad (2.4)$$

Finalement on peut écrire l'équation différentielle qui représente le mouvement par :

$$\ddot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=0 \qquad (2.5)$$

On remarque que c'est une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre.

Exemple 2 :

On prend le système du pendule simple.

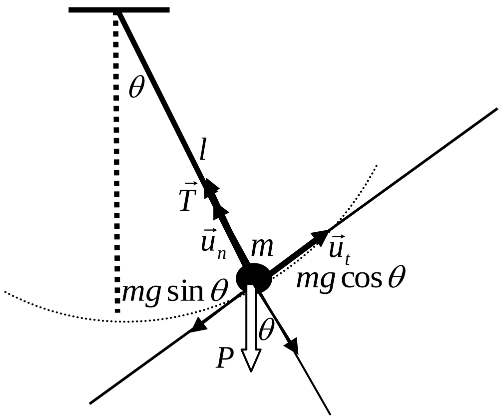


Figure 2.2 : Système à un degré de liberté : le pendule simple.

D'après la deuxième loi de Newton, $\sum\vec{F}=m\vec{\gamma}$, on trouve :

$$\vec{p}+\vec{T}=m\vec{\gamma} \qquad (2.6)$$

- Par la projection sur l'axe $\vec{u_t}$:

$$-mg\,sin(\theta)=m\gamma_t \qquad (2.7)$$

γ_t : L'accélération tangentielle et g : la pesanteur.

- Par la projection sur l'axe $\vec{u_n}$:

$$-mg\cos(\theta)+T=m\gamma_n=0 \qquad (2.8)$$

Nous avons $v_t=l\dot{\theta}$ *et* $\gamma_t=l\ddot{\theta}$

Par remplacement dans l'équation (2.7), on trouve.

$$-mg\sin(\theta) = ml\ddot{\theta} \tag{2.9}$$

En fin on peut écrire,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \tag{2.10}$$

On suppose que le pendule oscille avec des petits angles ce que permit d'utiliser l'approximation $\sin(\theta) = \theta$. L'équation (2.10) s'écrit donc comme suit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{2.11}$$

C'est l'équation différentielle du mouvement vibratoire.

b- Méthode de Lagrange :

Nous avons consacré une brève démonstration de la méthode de Lagrange dans l'annexe 1. Dans tout qui suit, on utilise directement la méthode. Pour mieux comprendre et apprécier l'intérêt de la méthode de Lagrange, On utilise les deux exemples précédents.

➢ **Masse ressort**

On considère un système masse-ressort à un degré de liberté. Il est libre (aucune force extérieure) et conservatif(non amorti). Dans ce cas (voire l'annexe 1), l'équation de Lagrange s'écrit comme suit,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (2.12).$$

L : Le Lagrangien du système est donné par : $L = T - U$

q : La coordonnée généralisée, dans ce cas $q \equiv x$

T : L'énergie cinétique du système, $T = \frac{1}{2}mv^2$, $comme\, v = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

U : L'énergie potentielle du système, $U = \frac{1}{2}kx^2$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.13}$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{d\dot{x}}\right) = m\ddot{x} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \tag{2.15}$$

En remplaçant les équations (1.14) et (1.15)dans (1.13) on aboutit à l'équation différentielle représentant le mouvement vibratoire,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2.16}$$

- **Pendule simple**

Le système est libre (aucune force extérieure appliquée) et conservatif(non amorti). L'équation de Lagrange est donnée par la relation (2.12),

L : Le Lagrangien du système est donné par : $L = T - U$

q : La coordonnée généralisée, dans ce cas $q \equiv \theta$

T : L'énergie cinétique du système, $T = \frac{1}{2}mv^2$, $comme\, v = l\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

U : L'énergie potentielle du système, $U = mgl(1 - \cos\theta)$

$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$,

$$L = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - mgl + mgl\cos\theta \qquad (2.17)$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{d\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \qquad (2.18)$$

- $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$,

Comme nous l'avons mentionné auparavant, il faut faire des simplifications pour arriver à des solutions analytiques. On considère que le pendule oscille (vibre) avec des petits angles, ce qui permit d'écrire $\sin\theta \approx \theta$.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\theta \qquad (2.19)$$

On remplace les équations (2.18) et (2.19) dans l'équation de Lagrange (2.12) on trouve :

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \qquad (2.20)$$

A la fin, on trouve l'équation différentielle qui représente le mouvement vibratoire

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (2.21)$$

On reprend par exemple le cas du système masse ressort et mettant l'équation sous la forme

$$\ddot{x} + w_n^2 x = 0 \text{ avec } w_n^2 = \frac{k}{m} \qquad (2.22)$$

La résolution de l'équation (2.22) est de la forme (voire l'annexe 2),

$$x = A_1\cos(w_n t) + A_2\sin(w_n t) \qquad (2.23)$$

A_1 *et* A_2 sont des constantes peuvent être trouvées à partir les conditions initiales.

$$à \quad t = 0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_1 = x_0 \quad et \quad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{w_n}$$

Finalement on trouve :

$$x = x_0 \cos(w_n t) + \frac{\dot{x}_0}{w_n} \sin(w_n t) \qquad (2.24).$$

Le déplacement x de la masse, peut être écrit sous une forme plus adéquate, en posant $A_1 = A\sin\varphi_0 \quad et \quad A_2 \cos\varphi_0$. Ça veut dire qu'on remplace A_1 *et* A_2 par A *et* φ_0.

$$x = A\sin\varphi_0 \cos(w_n t) + A\cos\varphi_0 \sin(w_n t) \qquad (2.25)$$

En utilisant, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$, l'équation (2.25) peut s'écrire comme suit:

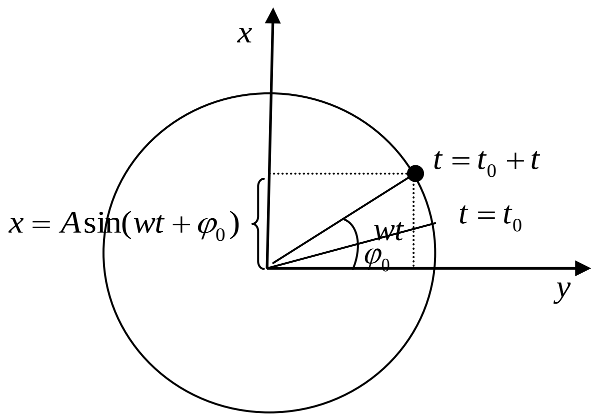
$$x = A\sin(w_n t + \varphi_0) \qquad (2.26)$$

L'équation représente un mouvement harmonique dont :

- A : l'amplitude du mouvement.
- w_n : le battement naturel du mouvement.
- φ_0 : la phase (l'angle initial).

La vitesse de la masse est représentée par le premier dérivé de la position x

$$\dot{x} = Aw_n \cos(w_n + \varphi_0) \qquad (2.27)$$



L'accélération est donnée par le dérivé second

$$\ddot{x} = -Aw_n^2 \sin(w_n t + \varphi_0) \tag{2.28}$$

Sur la figure 1.14 on représente la position x, la vitesse $\dot{x}$ ainsi que l'accélération $\ddot{x}$ de la masse m

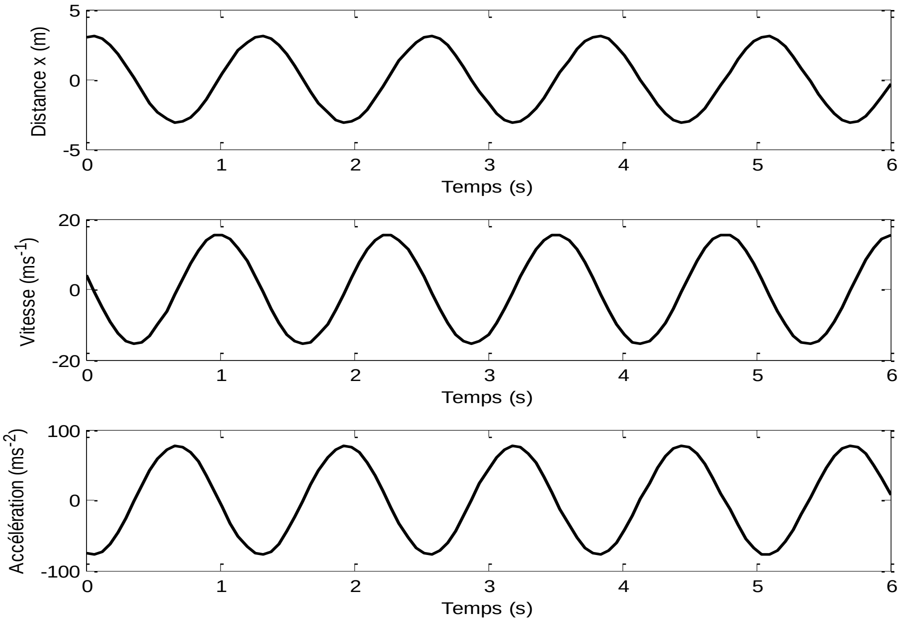


Figure 2. 3 : Position, vitesse et accélération en fonction du temps pour le mouvement harmonique

2. 2 Vibrations de rotations libres non amorties

Soit un système oscillant autour d’un axe, le mouvement résultant s’appelle mouvement vibratoire rotationnel. On prend l’exemple de deux masses m_1 et m_2 reliées par une tige métallique de masse négligeable et de longueur r. La tige est montée sur une barre métallique circulaire qu'est à son tour fixée par l'autre extrémité à un bâti fixe (fig.2.4). La barre métallique est de longueur ***l***, de moment d'inertie I_0 et de coefficient de cisaillement G . Si le système est déplacé de sa position d'équilibre par un angle donné θ, il résulte dans la barre un moment de torsion $M_t = \frac{GI_0}{l}\theta$. Alors, la barre agit comme un ressort de torsion avec une raideur de torsion $k_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{l}$.

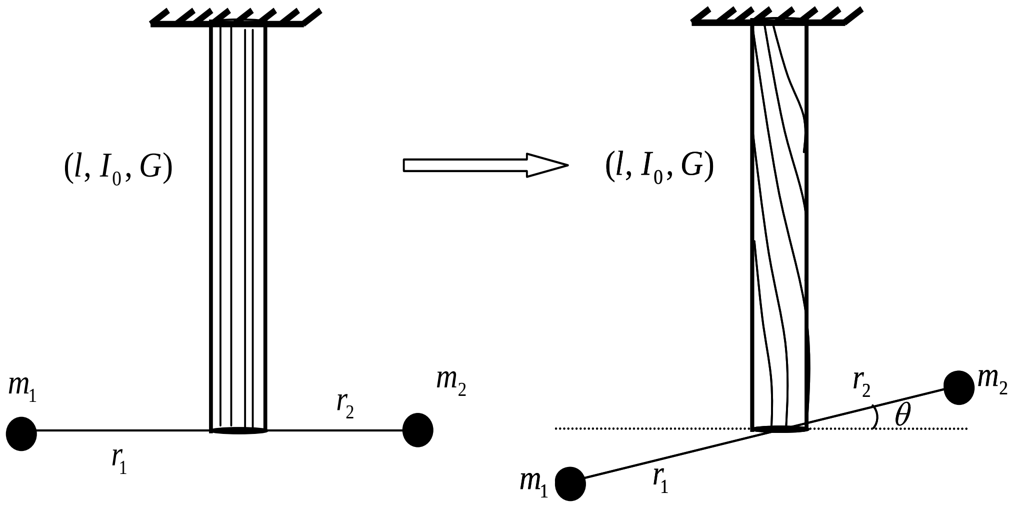


Figure 2. 4 Mouvement vibratoire rotationnel.

Le système a un degré de liberté, la seule coordonnée nécessaire pour l'étudier est l'angle θ. On utilise l'équation de Lagrange pour déduire l'équation différentielle représentant le mouvement,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (2.29\text{-a})$$

La coordonnée généralisée q dans ce cas est l'angle θ. Donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad (2.29\text{-b})$$

Où $L = U - T$

- $U = \frac{1}{2}k_t\theta^2$ (2.30)

- $T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2,\qquad v_1 = r_1\dot{\theta} \quad et \quad v_2 = r_2\dot{\theta}$

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2\right)\cdot\dot{\theta}^2 \tag{2.31}$$

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \tag{2.32}$$

où $I = \left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2\right)$ est le moment d'inertie du système.

> **Remarque :** *le moment d'inertie dans un système qui fait un mouvement de rotation est équivalant à la masse dans un système faisant un mouvement de translation.*

A la fin on écrit le Lagrangien du système comme suit :

$$L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_t\dot{\theta}^2 \tag{2.33}$$

Appliquant le théorème de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = I\ddot{\theta}$ et $\frac{\partial L}{\partial\theta} = -k_t\theta$.

Finalement l'équation différentielle qui décrit le mouvement peut s'écrire comme suit :

$$\ddot{\theta} + \frac{k_t}{I}\theta = 0 \tag{2.34}$$

$$\ddot{\theta} + w_n^2\theta = 0 \tag{2.35}$$

- $w_n = \sqrt{\frac{k_t}{I}}$: le battement naturelle du mouvement vibratoire en $rad.s^{-1}$.

- $T_n = \frac{2\pi}{w_n}$: la période naturelle du mouvement vibratoire.

- $f_n = \frac{1}{T_n}$: la fréquence naturelle du mouvement vibratoire en s^{-1}

Rappel :

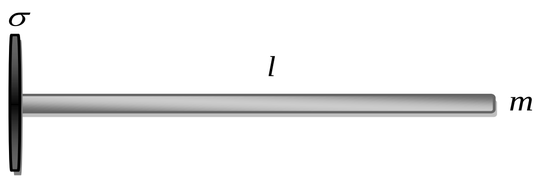
- *Le système précédent est constitué de deux masses distantes (les masses sont éloignées), le moment d'inertie est donné par:* $I = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)$.

- *Si le système est constitué de plusieurs masses distantes (les masses sont éloignées), le moment d'inertie est donné par:* $I = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots m_n r_n^2\right) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2$.

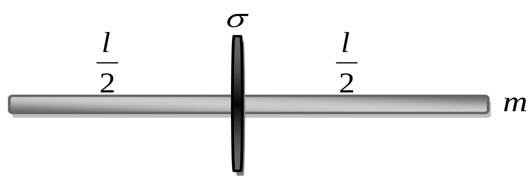
Si le système est constitué de plusieurs masses adjacentes (distribution continu de la masse), le moment d'inertie est donné par : $I = \int_{\sigma} r^2 dm$

dm *est la masse de l'élément qu'est à une distance* r *de l'axe de rotation σ*

Exemples:

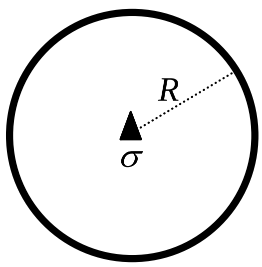


$$I_\sigma = \frac{1}{3} m l^2$$



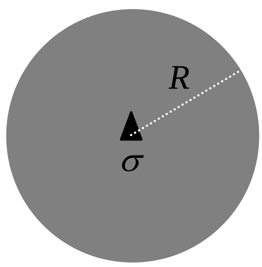
$$I_\sigma = \frac{1}{12} m l^2$$

Anneau



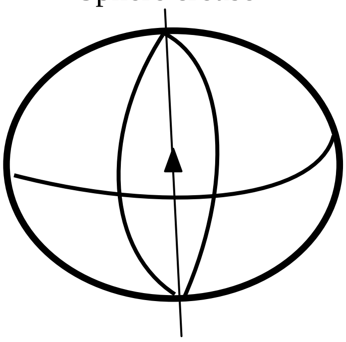
$$I = mR^2$$

Disque



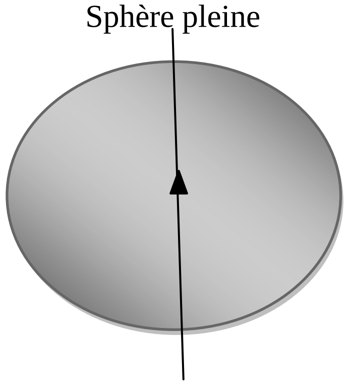
$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

Sphère creuse



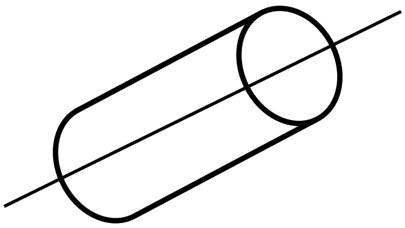
$$I = \frac{2}{3} mR^2$$

Sphère pleine

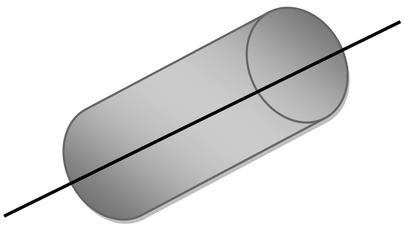


$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

Cylindre creux Cylindre plein



$$I = \frac{1}{2} mR^2$$



$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

Théorème de Huygens

Soit un objet en rotation autour d'un axe σ passant par son centre de masse. Si Δ est un axe parallèle à σ distant de σ avec une distance d , Le moment d'inertie de l'objet par rapport à l'axe Δ est donné par ;

$$I_\Delta = I_\sigma + md^2$$

I_σ *est le moment d'inertie de l'objet par rapport à l'axe* σ *et* m *la masse de l'objet.*

2. 3 L'énergie de l'oscillateur harmonique

Pour l'oscillateur harmonique, $E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$

$$x = A\sin(w_n t + \varphi) \Rightarrow \dot{x} = Aw_n \cos(w_n t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} mA^2 w_n^2 \cos^2(w_n t + \varphi) + \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(w_n t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} mA^2 w_n^2 (\cos^2(w_n t + \varphi) + \sin^2(w_n t + \varphi))$$

$$E = \frac{1}{2} mA^2 w_n^2 \qquad (2.36)$$

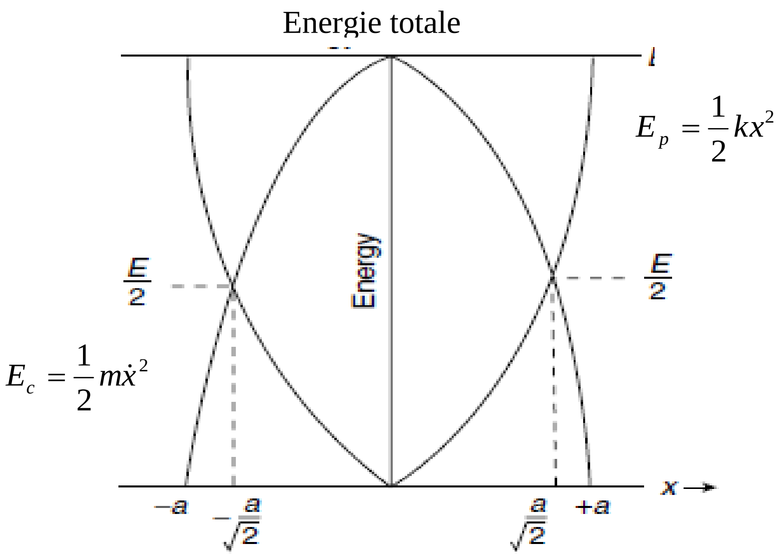


Figure 2.6 : Variation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentille dans les vibrations harmonique [5].

2. 3 Vibrations libres amorties

Les vibrations libres amorties, sont des vibrations résultantes après une perturbation initiale où l'amplitude diminue avec le temps jusqu'à l'arrêt complet du mouvement. La diminution de l'amplitude est due à la perte de l'énergie à cause des forces de frottement. Il y'a trois types de frottement :

a- **Frottement visqueux** : ce type de frottement, se trouve quand l'objet se meut dans un fluide avec des faibles vitesses. La force de frottement est inversement proportionnelle à la vitesse. $\vec{f} = -c\vec{v}$, *où c* est le coefficient de frottement.

b- **Frottement de Colomb** : le frottement de Colomb se trouve lorsqu'un corps solide se glisse contre un autre. La force de frottement est proportionnelle à la force normale à la surface. $\vec{f} = -\alpha \vec{N}$

c- **Frottement intermoléculaire** : le frottement intermoléculaire apparu lorsque le système subi des déformations dont lesquelles les molécules s'éloignent et se rapprochent. Au cours de ces interactions intermoléculaires le système perd de l'énergie sous forme de chaleur (énergie irrécupérable) au milieu extérieur.

Dans ce cours on s'intéresse seulement au frottement visqueux. On prend le système masse ressort amortisseur (fig. : 2.7)

- **Méthode de Newton**

D'après la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$, on trouve

$$\vec{f_f} + \vec{f_k} + \vec{p} = m\vec{\gamma} \tag{2.37}$$

$$-c\dot{x} - kx = m\ddot{x} \tag{2.38}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2.39}$$

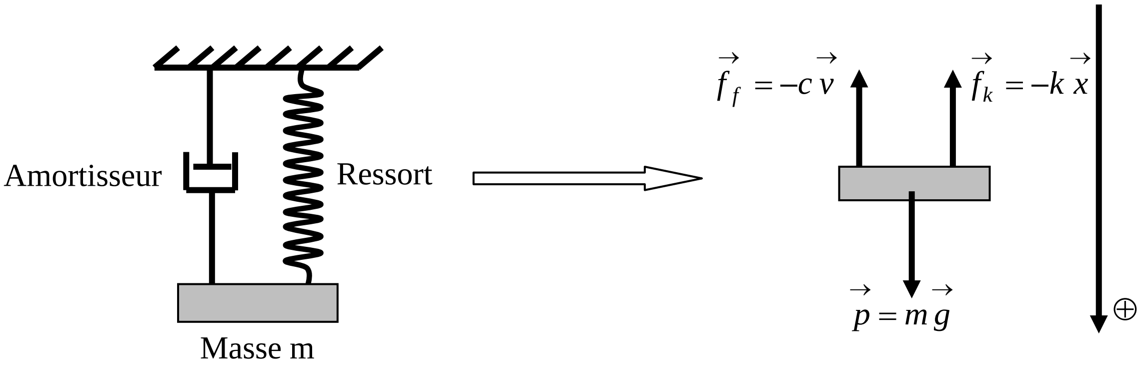


Figure 2.7 : Système amortie, masse ressort amortisseur.

L'équation du mouvement, est une équation différentielle du deuxième ordre.

- **Méthode de Lagrange**

Le système masse ressort amortisseur à un degré de liberté. Il est libre (aucune force extérieure) et non conservatif (amorti). Dans ce cas (voire l'annexe 1), l'équation de Lagrange s'écrit comme suit,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \qquad (2.40)$$

L : Le Lagrangien du système est donné par : $L = T - U$

q : La coordonnée généralisée, dans ce cas $q \equiv x$

T : L'énergie cinétique du système, $T = \frac{1}{2}mv^2$, $comme\; v = \dot{x} \;\; \Rightarrow \;\; T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

U : L'énergie potentielle du système, $U = \frac{1}{2}kx^2$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \qquad (2.41)$$

- $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{d\dot{x}}\right) = m\ddot{x} \qquad (2.42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \tag{2.43}$$

$$D = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = c\dot{x} \tag{2.45}$$

Remplaçons les équations (2.39), (2.40) et (2.42) dans (2.37) on aboutit à l'équation différentielle qui représente le mouvement vibratoire,

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2.46}$$

C'est la même équation différentielle obtenue par la mécanique de Newton.

Pour résoudre cette équation, if faut écrire l'équation caractéristique (voire l'annexe 2),

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \tag{2.47}$$

Les racines de l'équation sont :

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \text{ et } \lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.$$

Les solutions de l'équation caractéristique, bien sur l'équation différentielle, dépend des valeurs et de la nature (réel ou complexe) de $\lambda_1 et \lambda_2$. D'une autre manière, les solutions dépendent de la valeur et du signe de la racine $\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$.

- $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$ il y'a une solution double
- $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$ deux solutions réelles

- $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$ deux solutions complexes.

Avant d'étudier ces trois cas, nous allons définir le coefficient de frottement critique et le rapport de frottement.

2.3.1 Coefficient de frottement critique

Le coefficient de frottement critique C_c est définit comme la valeur du coefficient de frottement pour lequel la racine de l'équation caractéristique sera nulle.

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_c}{2m} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \quad \Rightarrow \quad c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Comme $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

Alors

$$C_c = 2mw_n. \tag{2.48}$$

2.3.2 Rapport d'amortissement

Le rapport d'amortissement ε est défini comme le rapport du coefficient de frottement au coefficient de frottement critique.

$$\varepsilon = \frac{C}{C_c} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{C}{2mw_n} \Rightarrow \frac{C}{2m} = \varepsilon \cdot w_n$$

Les racines de l'équation caractéristique peuvent être écrites sous la forme,

$$\lambda_1 = -\varepsilon \cdot w_n + \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}w_n$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon \cdot w_n - \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}w_n .$$

Cette forme d'écriture montre que la nature du mouvement dépend du rapport de frottement ε. On va trouver la nature du mouvement dans les trois cas possibles.

> ***Remarque** : si le rapport de frottement est nul* $\varepsilon_0 = 0 \Rightarrow C = 0$ *(il n'y a pas de frottement). Les solutions de l'équation caractéristique sont* $\lambda_{1,2} = \pm i w_n$ *. Le mouvement est harmonique simple.*

2.3.3 1ier Cas ; amortissement faible $C < C_c$:

$$C < C_c \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\varepsilon^2 - 1\right) < 0$$

La valeur de la racine est négative, donc les solutions de l'équation caractéristique sont complexes. On peut réécrire les solutions de l'équation caractéristique sous la forme ;

$$\lambda_1 = -\varepsilon \cdot w_n + i\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon \cdot w_n - i\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n \,.$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont de la forme $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle est donnée par (voire l'annexe 2),

$$x(t) = e^{\alpha.t}\,(A_1 \cos(\beta.t) + A_2 \sin(\beta.t)) \tag{2.49}$$

où, $\alpha = -\varepsilon w_n$ et $\beta = \sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n$. Par remplacement, on trouve

$$x(t) = e^{-\varepsilon w_n.t}\,(A_1 \cos(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t) + A_2 \sin(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t)) \tag{2.50}$$

A_1 *et* A_2 sont des constantes peuvent être trouver à partir des condition initiales.

$$t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = -\varepsilon w_n e^{-\varepsilon w_n t}\,(A_1 \cos(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t) + A_2 \sin(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t)) +$$

$$e^{-\varepsilon w_n t}\,(-A_1\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.\sin(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t) + A_2\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.\cos(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t))$$

On déduit :

$$A_1 = x_0, \quad A_2 = \frac{\dot{x} + \varepsilon w_n x_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\, w_n}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon w_n . t}(x_0 \cos(\sqrt{(1-\varepsilon^2)} w_n .t) + \frac{\dot{x}_0 + \varepsilon w_n x_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\, w_n} \sin(\sqrt{(1-\varepsilon^2)} w_n .t)) \qquad (2.51)$$

Comme nous avons dit auparavant, l'équation peut être écrite sous la forme la plus adéquate

$$x(t) = A e^{-\varepsilon w_n t} \sin(w_a t + \varphi_0) \qquad (2.52)$$

Où $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\quad \varphi_0 = \arctan\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)$ *et* $\quad w_a = \sqrt{1-\varepsilon^2}\, w_n$.

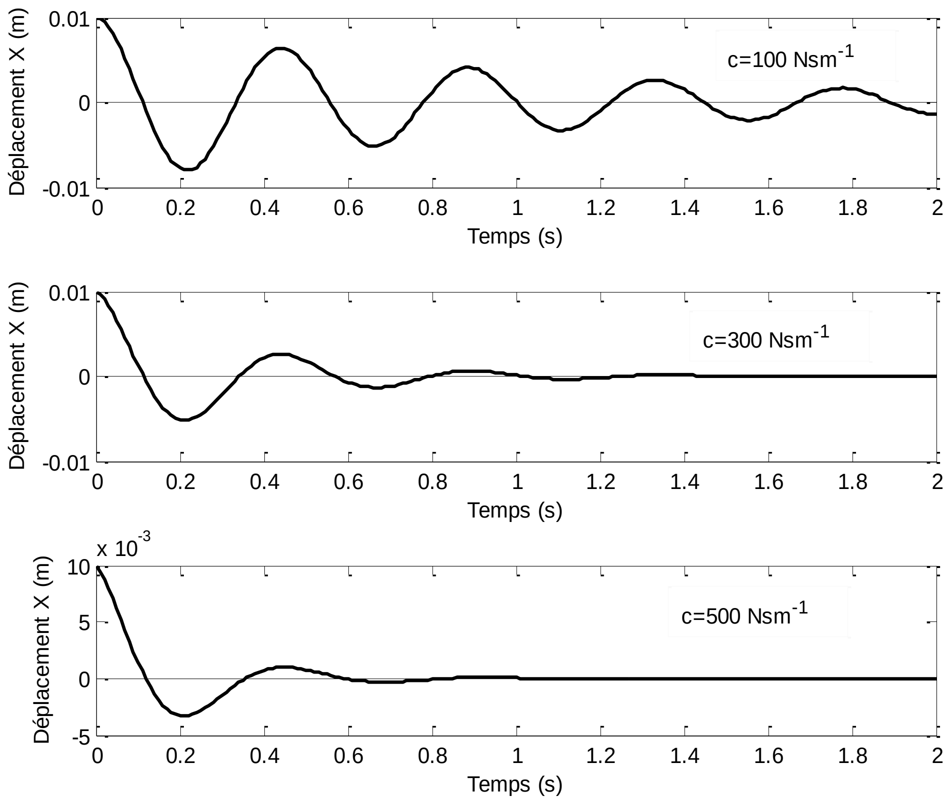


Figure 2.8 **:** Vibration faiblement amortie d'un système masse ressort (m=500 kg, k=10^4Nm^{-1}), pour trois différentes valeurs de coefficient de frottement.

w_a : le battement amorti, il est toujours inferieur à w_n .

L'amplitude du mouvement $Ae^{-\varepsilon w_n t}$ diminue avec le temps jusqu'à l'arrêt du système.

2.3.4 2ème cas : frottement critique :

$$C = C_c \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(1-\varepsilon^2\right)} = 0$$

Les racines de l'équation caractéristique seront données par : $\lambda_{1,2} = -w_n$. La racine est réelle doublée, et par suite la solution de l'équation différentielle est donnée par (voir l'annexe 2):

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-w_n t} \tag{2.53}$$

Des conditions initiales, $t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = \dot{x}_0 + w_n x_0 \end{cases}$

$$x(t) = (x_0 + (\dot{x}_0 + w_n x_0)t)e^{-w_n t} \tag{2.54}$$

Le mouvement n'est pas vibratoire, le système va revenir à sa position initiale sans faire des oscillations (fig. 2.8).

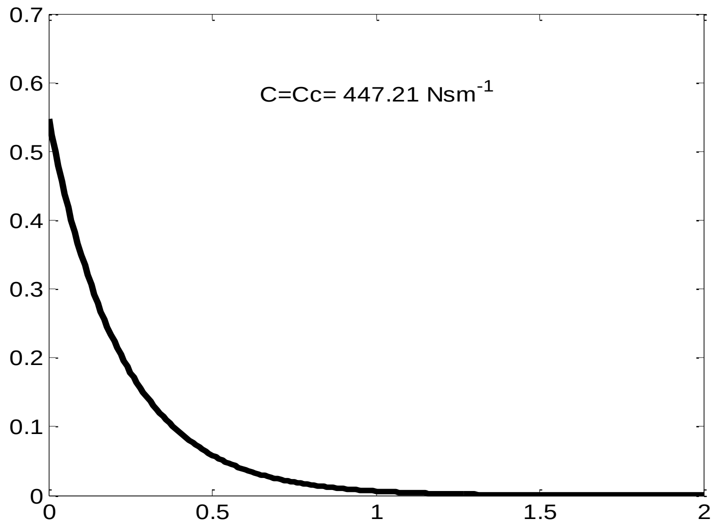


Figure 2.9 **:** Vibration critique amortie d'un système masse ressort (m=50 kg, k=10^4Nm^{-1}.

2.3.5 3ème cas ; frottement lourd :

$C > C_c \quad \Rightarrow \quad \varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \sqrt{\varepsilon^2 - 1} > 0$, Les racines de l'équation caractéristique seront données par : $\lambda_{1,2} = -w_n$. Les racines sont réelles,

$$\lambda_1 = -\varepsilon w_n + \sqrt{(1-\varepsilon^2)} w_n$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon w_n - \sqrt{(1-\varepsilon^2)} w_n .$$

Par suite, la solution de l'équation différentielle est donnée par (voir l'annexe 2):

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1} + A_2 e^{\lambda_2} \tag{2.55}$$

Le mouvement n'est pas vibratoire. Le système va retrouver son état initial sans oscillations dans un temps plus grand que dans le cas de frottement critique.

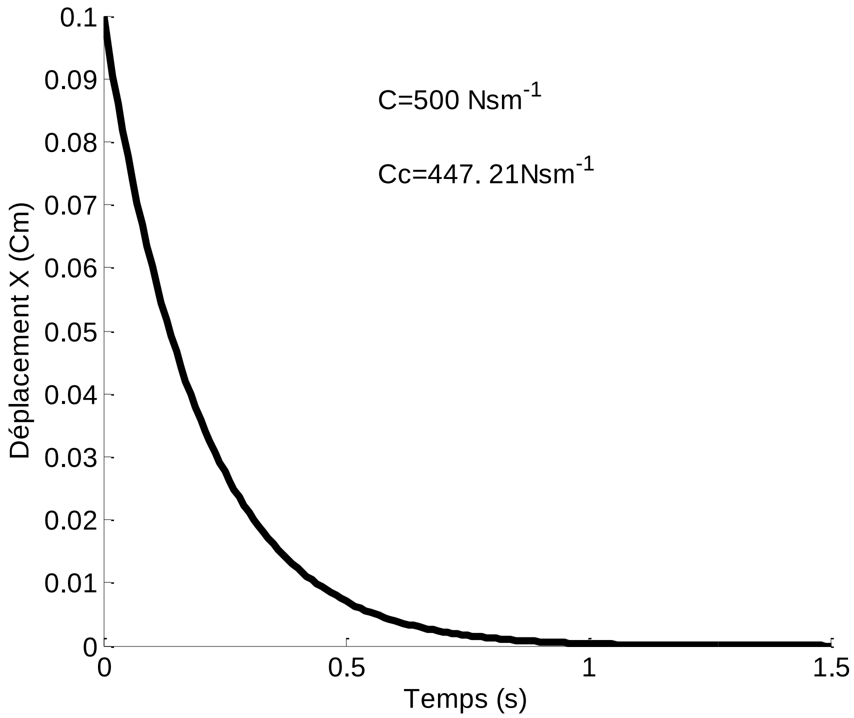


Figure 2.10 **:** Vibration lourdement amortie d'un système masse ressort (m=50 kg, k=10^4Nm^{-1}.

2.3.6 Décrément logarithmique

Le décrément logarithmique est défini comme le taux de diminution de l'amplitude du mouvement vibratoire. Mathématiquement, le décrément logarithmique est donné par le logarithme naturel de deux amplitudes successives.

Soit t_1 *et* t_2 les temps de deux amplitudes maximales successives.

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{Ae^{-\varepsilon w_n t_1}\sin(w_a t_1 + \varphi_0)}{Ae^{-\varepsilon w_n t_2}\sin(w_a t_2 + \varphi_0)} \tag{2.56}$$

$t_2 = t_1 + T_a$, $\quad T_a = \dfrac{2\pi}{w_a}$: la période du mouvement amorti.

$$\sin(w_d t_2 + \varphi_0) = \sin(w_d t_1 + 2\pi + \varphi_0) = \sin(w_d t_1 + \varphi_0)$$

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{e^{-\varepsilon w_n t_1}}{e^{-\varepsilon w_n t_2}} = \frac{e^{-\varepsilon w_n t_1}}{e^{-\varepsilon w_n (t_1 + t_a)}} = e^{\varepsilon w_n T_a} \tag{2.57}$$

Et par suite le décrément logarithmique est donné par ;

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) = \varepsilon w_n T_a \tag{2.58}$$

On remplace par la formule de T_a, le décrément logarithmique peut être écrite sou la forme

$$\delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{2.59}$$.

Remarque : On peut écrire le taux ε d'amortissement en fonction du décrément logarithmique δ comme,

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

Cette relation permet de trouver expérimentalement le coefficient de frottement par la mesure de décrément logarithmique.

Le décrément logarithmique de deux amplitudes séparées par le temps $t_2 = t_1 + nT_a$

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{x_2}.\frac{x_2}{x_3}.\frac{x_3}{x_4}..............\frac{x_n}{x_{n+1}} \tag{2.60}$$

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = e^{\varepsilon w_n T_a}$$

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = e^{n\varepsilon w_n T_a}$$

Le décrément logarithmique sera donné :

$$\delta = n\frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{2.61}$$

2.3.7L’énergie dissipée lors du frottement faible

L’énergie dissipée lors du frottement est égale au travail fourni par la force de frottement (dans notre cas ; la force de frottement est de nature visqueuse).

Lors d’un cycle, l’énergie dissipée est égale au travail fourni par la force de frottement pendent ce cycle. La force de frottement visqueux est de la forme $\vec{f} = -c\,\vec{v}$.

Par définition le travail de la force $\vec{f}$ est donnée par ;

$$w = \int_0^{T_a} \vec{f}\,d\,\vec{x} \quad \Rightarrow \quad w = -c\int_0^{T_a} \vec{v}\,d\,\vec{x} \quad \Rightarrow \quad w = -c\int_0^{T_a} v dx.$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx = vdt, \qquad v = \dot{x}$$

$$w = -c\int_0^{T_a} \dot{x}\dot{x}dt \quad \Rightarrow \quad w = -c\int_0^{T_a} \dot{x}^2 dt\ .$$

$$\Delta E = c\int_0^{T_a} \dot{x}^2 dt$$

Nous avons,

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(w_a t + \varphi_0)$$

$$\alpha = \frac{c}{2m}\,,\ w_a = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,w_n$$

$$\dot{x} = -\alpha Ae^{-\alpha t}\sin(w_a t + \varphi) + Aw_a Ae^{-\alpha t}\cos(w_a t + \varphi)$$

$$\dot{x} = -Ae^{-\alpha t}(\alpha\sin(w_a t + \varphi) - w_a A\cos(w_a t + \varphi))$$

Dans le cas d'amortissement faible, le facteur $e^{-2\alpha t} \approx 1$ dans l'intervalle $0 \to T_a$

$$\Delta E = cA^2\int_0^{T_a}(\alpha^2\sin^2(w_a t + \varphi_0) + w_a^2\sin^2(w_a t + \varphi_0) - 2\alpha w_a\sin(w_a t + \varphi_0)\sin(w_a t + \varphi_0))dt$$

On fait un changement de variable

$$\theta = w_a t + \varphi \quad \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = w_a \quad \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{w_a} \quad \begin{cases} t : 0 \to T_a \\ \theta : 0 \to 2\pi \end{cases}$$

On a Aussi, $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \pi,\quad \int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta = 0$

A la fin, l'énergie dissipée lors d'un cycle sera donnée par :

$$\Delta E = \frac{cA^2}{w_a}(\alpha^2\pi + w_a^2\pi) = \frac{cA^2}{w_a}w_n^2$$

$$\Delta E = \frac{cA^2\pi}{w_a} w_n^2 = m\alpha A^2 T_a w_n^2 \qquad (2.62)$$

2.3.8 Facteur de qualité

Le facteur de qualité est défini par $Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$

Où E est l'énergie emmagasinée dans l'oscillateur (c'est l'énergie de l'oscillateur harmonique) et ΔE est l'énergie dissipée lors d'un cycle.

$$E = mA^2 w_n^2$$

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{mA^2 w_n^2}{mA^2 \alpha T_a w_n^2}$$

$$Q = \frac{2mw_a}{c} \qquad (2.63)$$

En physique des vibrations, le facteur de qualité Q est un paramètre sans dimension qui décrit comment un oscillateur est sous-amorti. Un facteur de qualité plus élevé, indique un taux de perte d'énergie plus faible par rapport à l'énergie stockée dans l'oscillateur (les oscillations s'arrêtent plus lentement). par exemple, un pendule oscillant dans l'air a un facteur de qualité élevé, alors qu'un pendule immergé dans l'huile a un facteur de qualité faible.

Chapitre 3

Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté.

3.1Introduction

Les vibrations (oscillations) forcées, se produisent lorsque le système est soumis le long de ses vibrations à une des forces extérieures périodiques. Souvent, ces forces s'appellent excitations extérieures. Le mouvement résultant, s'appelle la réponse du système à l'excitation extérieure. La force d'excitation peut être harmonique, périodique non harmonique, non périodique ou aléatoire.

Dans le présent cours, on s'intéresse seulement aux excitations harmoniques. L'excitation harmonique peut être donnée mathématiquement par :

$$f(t) = f_0 \sin(w.t + \varphi), \quad f(t) = f_0 \cos(w.t + \varphi), \quad f(t) = f_0 e^{i(w.t+\varphi)}.$$

φ : la phase de l'excitation (dépend de la valeur la force f à $t = 0$).

3.2 Excitation harmonique d'un système non amortie.

- **équations du mouvement :**

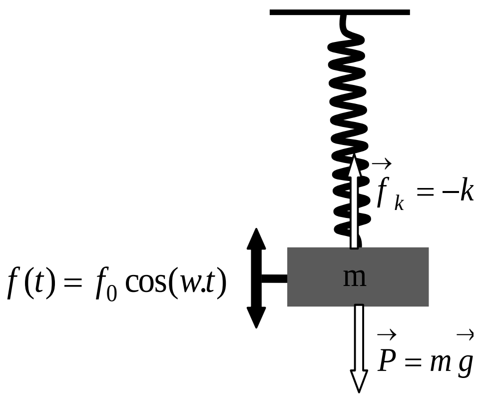


Figure 3.1 : Système masse ressort harmoniquement excité

De la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$,

$$\vec{f}_t + \vec{f}_k + \vec{p} = m\vec{\gamma} \tag{3.1}$$

$$-kx + f_t = m\ddot{x} \tag{3.2}$$

$$m\ddot{x} + kx = f_t \tag{3.3}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_o}{m}\cos(w.t) \tag{3.4}$$

- De l'application du théorème de Lagrange, qui est recommandé dans ce cours,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = f_q \tag{3.5}$$

Où $\begin{cases} L = T - U \quad \textit{le Langrangien du système} \\ q \equiv x \quad \textit{la coordonée généralisée} \\ f_q = f_0 \sin(w.t + \varphi_0) \quad \textit{la force congégiée} \end{cases}$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx \tag{3.6}$$

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = m\ddot{x}$ (3.7)
- $\frac{\partial L}{\partial q} = kx$ (3.8)
- $f_q = f_0 \cos(w.t)$ (3.9)

Par remplacement,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m}\cos(w.t) \tag{3.10}$$

- **Solution de l'équation différentielle.**

L'équation du mouvement, est une équation différentielle du deuxième ordre avec seconde membre. La solution de cette équation est la somme de deux solutions (voire l'annexe 2) :

- Solution général x_g de l'équation homogène (sans seconde membre).

- Solution particulière x_p de l'équation non homogène (avec seconde membre).

La solution x_g de l'équation homogène, $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}+w_n^2 x=0$ est donnée par :

$$x_g = A_1\cos(w_n t)+A_2\sin(w_n t) \tag{3.11}$$

Puisque w_n n'est pas une solution de l'équation caractéristique, la solution particulière x_p est donnée par :

$$x_p = C_1\cos(w.t)+C_2\sin(w.t) \tag{3.12}$$

Pour trouver les constantes C_1 *et* C_2, il faut remplacer cette solution dans l'équation différentielle (3.10). Nous avons,

$$x_p = C_1\cos(w.t)+C_2\sin(w.t)$$

$$\dot{x}_p = -C_1 w\sin(w.t)+C_2 w\cos(w.t)$$

$$\ddot{x}_p = -C_1 w^2\sin(w.t)-C_2 w^2\sin(w.t)$$

Par remplacement on trouve,

$$-C_1 w^2\sin(w.t)-C_2 w^2\sin(w.t)+C_1 w_n\cos(w.t)+C_2 w_n\sin(w.t)=\frac{f_0}{m}\cos(w..t)$$

Par comparaison les deux membres de l'équation, on trouve :

$$C_1=\frac{\left(\frac{f_0}{m}\right)}{\left(w_n^2-w^2\right)}, \qquad C_2=0.$$

On met *C₁ =X* et divisons le numérateur et le dénominateur par k on trouve,

$$X=\frac{\left(f_0/k\right)}{\frac{m}{k}\left(w_n^2-w^2\right)} \qquad \Rightarrow \qquad X=\frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2} \tag{3.13}$$

$\delta_{st} = \frac{f_0}{k}$ ***: représente la déflection de la masse sous l'application de la force*** f_0 ***et s'appelle la déflection statique de la masse.***

N.B :

- La solution générale x_g de l'équation homogène représente un mouvement harmonique. Elle s'appelle réponse transitoire puisqu'elle va disparaitre avec le temps.
- La solution particulière x_p de l'équation non homogène représente la réponse de la masse à la force d'excitation extérieure.

En fin, la solution particulière s'écrit :

$$x_p = \frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}\cos(w.t) \qquad (3.14)$$

On somme les solutions x_g et x_p,la solution de l'équation différentielle du mouvement (1) s'écrit comme suit :

$$x = A_1\cos(w_n t) + A_2\sin(w_n t) + \frac{\delta_{st}}{\left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)}\cos(w.t)$$

(3.15)

Les constantes A_1 et A_2 seront trouvées par les conditions initiales.

$$t = 0\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} A_1 = x_0 - \dfrac{\delta_{st}}{\left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)} \\ A_2 = \dfrac{\dot{x}_0}{w_n} \end{cases}$$

$$x = \left(x_0 - \frac{\delta_{st}}{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)} \right) \cos(w_n t) + \frac{\dot{x}_0}{w_n} \sin(w_n t) + \frac{\delta_{st}}{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)} \cos(w.t) \qquad (3.16)$$

3.2.2 Facteur d'amplification :

Le rapport $\frac{X}{\delta_{st}}$ (le rapport de l'amplitude du mouvement dynamique à l'amplitude statique) représente le facteur d'amplification.

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2} \qquad (3.17)$$

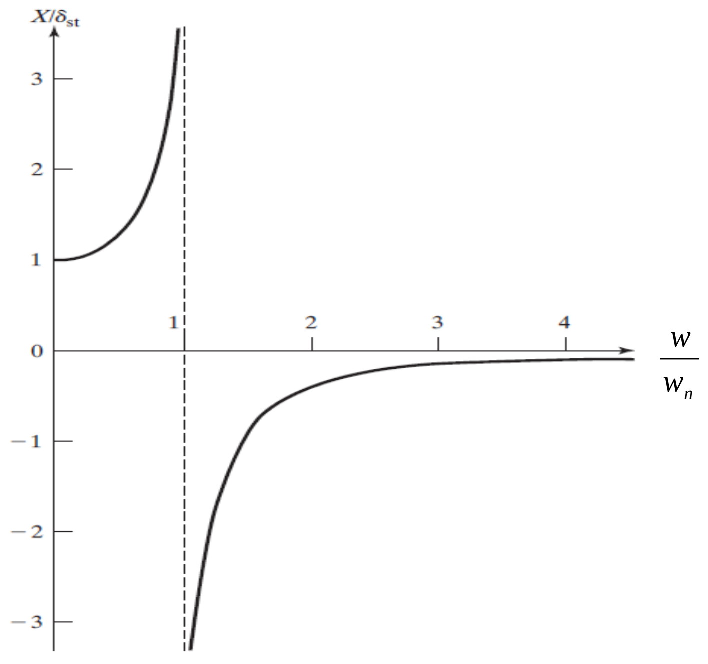


Figure 3. 2 : Facteur d'amplification pour un système non amortie [2]

De la figure, on distingue trois cas.

➢ **1ièr cas :** Le facteur d'amplification est positif

$$0<\frac{w}{w_n}<1 \quad \Rightarrow \quad \left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)>0 \quad \Rightarrow \quad X=\frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}>0.$$

Donc $\begin{cases} f=f_0\cos(w.t) \\ x_p=X\cos(w.t) \end{cases}$, on dit que la réponse du système à l'excitation et l'excitation sont en phase.

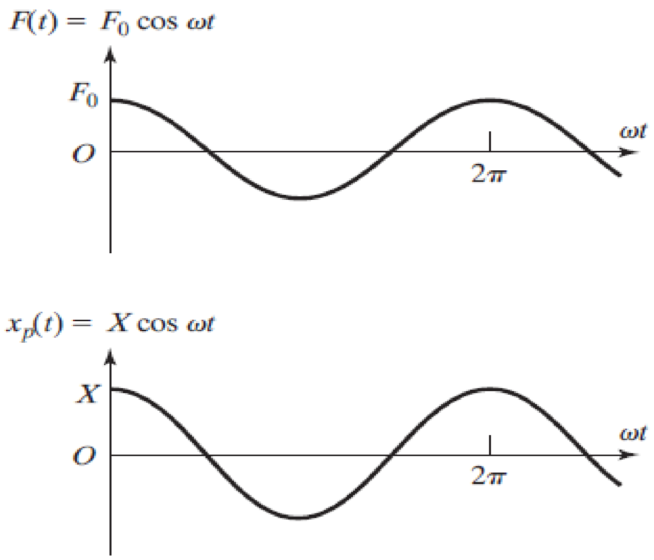


Figure 3. 3 : Réponse harmonique quand $0<\frac{w}{w_n}<1$ [2]

➢ **2ième cas :** Le facteur **d'amplification** est négatif

$$\frac{w}{w_n}>1 \quad \Rightarrow \quad \left(1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)<0 \quad \Rightarrow \quad X=\frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}<0.$$

Tant que l'amplitude X est toujours positive on peut écrire,

$$-X = \frac{\delta_{st}}{\left(\frac{w}{w_n}\right)^2 - 1} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_p = -X\cos(w.t)$$

Donc $\begin{cases} f = f_0\cos(w.t) \\ x_p = -X\cos(w.t) \end{cases}$, on dit que la réponse du système à l'excitation et l'excitation sont en déphasage.

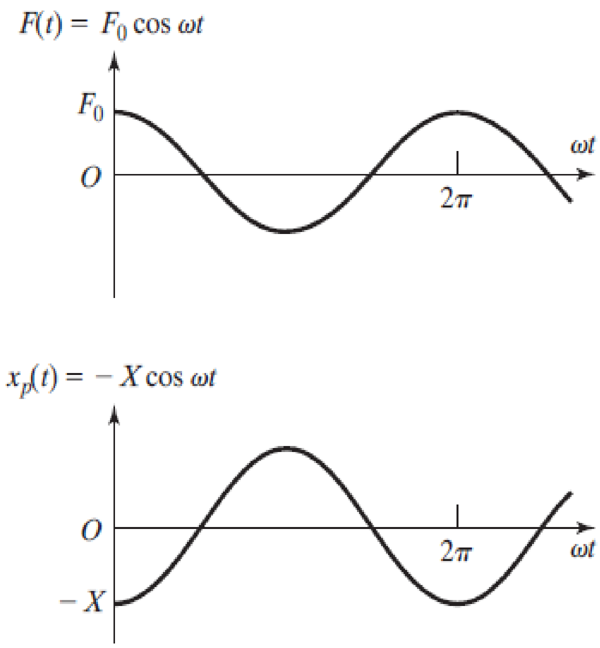


Figure 3. 4 : Réponse harmonique quand $\frac{w}{w_n} > 1$

***Remarque** :Si $\frac{w}{w_n} \to \infty$, ça veut dire que le battement de la force d'excitation est plus grand que le battement naturel du système, $X \to 0$. On conclut que le système ne répond pas (le système reste émouvant) à une excitation plus grand que leur propre battement (battement naturel).*

- **3[ième] cas Phénomène de la résonance :** $\frac{w}{w_n} = 1$

Lorsque la fréquence de la force d'excitation extérieure est égale à la fréquence naturelle du système, l'amplitude de la réponse du système croit jusque l'infini. Ce phénomène, s'appelle la résonance. L'étude du phénomène de la résonance a une grande importance dans la construction industrielle et dans l'ingénierie.

$$\frac{w}{w_n}=1 \quad \Rightarrow \quad w=w_n \quad \Rightarrow \quad X=\frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}\to\infty .$$

Il faut résoudre l'équation du mouvement dans le cas où $w=w_n$;

$$\ddot{x}+w_n^2x=f_0\cos(w_n.t) \tag{1.18}$$

Tant que w_n est une solution de l'équation caractéristique (voir annexe 2), la solution particulière de l'équation non homogène est de la forme

$$x_p=t\left(C_1\cos(w_nt)+C_2\sin(w_nt)\right) \tag{1.19}$$

Pour trouver les constantes C_1 *et* C_2, on remplace par x_p dans l'équation2. 22.

$$\dot{x}_p=t(-c_1w_n\sin(wt)+c_2w_n\cos(w_nt)+c_1\cos(w_nt)+c_2\sin(w_nt)$$

$$\ddot{x}_p=t\left(-C_1w_n^2\cos(w_nt)-C_2w_n^2\sin(w_nt)\right)-2C_1w_n\sin(w_nt)+2C_2w_n\cos(w_nt)$$

Par remplacement et par comparaison des membres de l'équation2. 22, on trouve

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{\frac{f_0}{m}}{2w_n} \\ C_2=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1=X=\frac{\delta_{st}}{2}.$$

Donc $x_p=\frac{\delta_{st}}{2}t\cos(w_nt)$ (3.21)

La réponse du système à la force de l'excitation est périodique dont l'amplitude est croissante avec le temps.

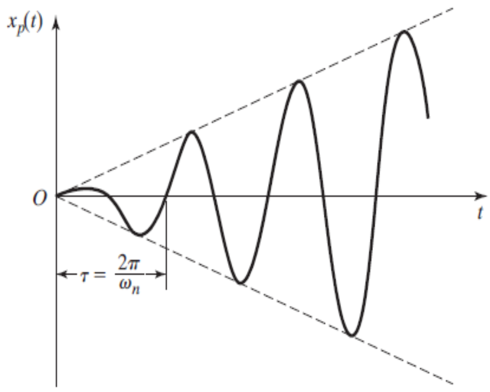


Figure 3. 5 : Réponse harmonique quand $\dfrac{w}{w_n} = 1$

3.2.3 Phénomène de battement :

Si le battement de l'excitation extérieure très proche du battement naturelle du système, il se produit un phénomène s'appelle phénomène de battement. L'amplitude du système s'augmente à un maximum puis se diminue jusque s'annule puis s'augmente et ainsi de suite.

Revenons à l'équation (3.16) et mettons $w \cong w_n$. Dans les conditions initiales $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, Pour simplification, l'équation peut être écrite sous la forme ;

$$x = \frac{\frac{f_0}{m}}{w_n^2 - w^2}\left(\cos(w.t) - \cos(w_n.t)\right)$$

$$x = -\frac{\frac{f_0}{m}}{w_n^2 - w^2}\left(\cos(w_n.t) - \cos(w.t)\right) \tag{3.22}$$

En utilisant la relation, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right).\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ Donc :

$$x = -\frac{\frac{f_0}{m}}{w_n^2 - w^2}\left(-2\sin\left(\frac{w_n + w}{2}t\right).\sin\left(\frac{w_n - w}{2}\right)\right) \tag{3.23}$$

On met $w_n + w = 2w$ *et* $w_n - w = 2\varepsilon$ et en multiplions les deux équations membre à membre, on trouve $w_n^2 - w^2 = 4\varepsilon \cdot w$.

$$x = \left(2\frac{\frac{f_0}{m}}{w_n^2 - w^2}.\sin(\varepsilon.t) \right)\sin(w.t) \tag{3.24}$$

Le système oscille avec un battement w (période $f = \frac{2\pi}{w}$) et avec une amplitude variante

$$2\frac{\frac{f_0}{m}}{w_n^2 - w^2}.\sin(\varepsilon.t) \tag{3.25}$$

La période du battement est donnée $T_{bat} = \frac{2\pi}{\varepsilon} = \frac{2\pi}{\left(\frac{w_n - w}{2}\right)}$.

La période du battement est plus grande que le battement des vibrations.

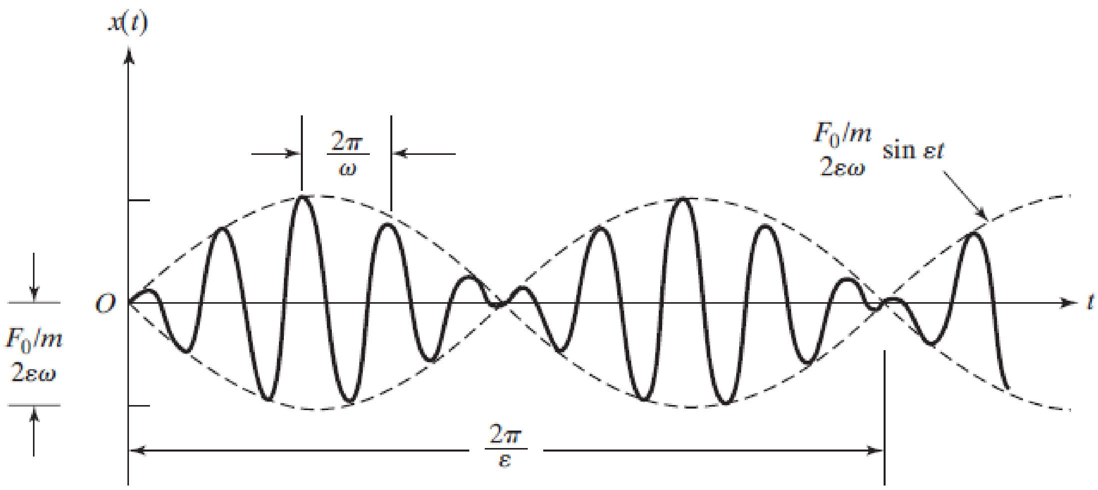


Figure 3. 6 : Phénomène de battement [2]

3.2 Excitation harmonique d'un système amortie.

3.3.1 Réponse du système.

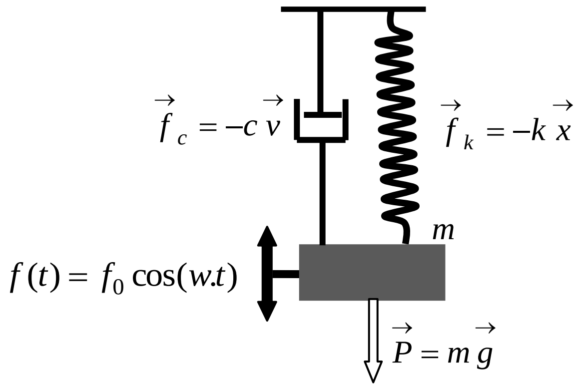


Figure 3.7 : Système excité, masse ressort amortisseur

- D'après la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{f} = m\vec{\gamma}$ on peut écrire ce qui suit :

$$\vec{p} + \vec{f}_k + \vec{f}_c + \vec{f}_t = m\vec{\gamma} \tag{3.26}$$

Par projection,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \cos(w.t) \tag{3.27}$$

- De l'équation de Lagrange, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = f_t(x)$, pour un système amorti soumis à une force extérieure.
    - $L = T - U$: (T, et U sont les énergies cinétique et potentielle du système).
    - $D = \frac{\partial f_c}{\partial \dot{x}}$: la fonction de dissipation (voir annexe (2)).
    - $f_t(x)$: la composante conjuguée de la force d'excitation correspond à la coordonnée x.

- $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx$,

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$,

- $\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$,

- $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$,

- $f(x)_t = f_0 \cos(w.t)$.

En fin, par remplacement l'équation du mouvement s'écrit,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \cos(w.t) \tag{3.28}$$

L'équation différentielle du mouvement est une équation de deuxième degré non homogène. La solution est la somme de :

- Solution générale de l'équation homogène x_g, qui va disparaitre avec le temps.

- Solution particulière x_p, qui représente le mouvement.

Par suite on s'intéresse seulement à la solution particulière x_p, qu'est de la forme

$$x_p = X \cos(w.t + \varphi) \tag{3.29}$$

Pour trouver les constantes X *et* φ, on dérive x_p et on remplace dans l'équation.

$$\dot{x}_p = -Xw\sin(w.t + \varphi) \quad et \quad \ddot{x}_p = -Xw^2 \cos(w.t + \varphi) \tag{3.30}$$

$$X\left[\left(k - mw^2\right)\cos(w.t + \varphi) - cw\sin(w.t + \varphi)\right] = f_0 \cos(w.t) \tag{3.31}$$

On utilise : $\begin{cases} \cos(w.t + \varphi) = \cos(wt)\cos\varphi - \sin\varphi \sin wt \\ \sin(w.t + \varphi) = \cos\varphi \sin(w.t) + \sin\varphi \cos(w.t) \end{cases}$ on trouve,

$$\begin{aligned} &\left(k - mw^2\right)\cos\varphi - cw\sin\varphi = \frac{f_0}{X} \\ &\left(k - mw^2\right)\sin\varphi + cw\cos\varphi = 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{\left(k - mw^2\right)^2 + c^2 w^2}} \tag{3.33}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{cw}{k - mw^2}\right) \tag{3.34}$$

Nous avons, $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\varepsilon = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2\sqrt{mk}}$ donc, on peut écrire : $\frac{c^2 w^2}{k^2} = \left(2\varepsilon \frac{w}{w_n}\right)^2$

La réponse du système à la force d'excitation peut écrite sous la forme ;

$$X = \frac{\frac{f_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + 4\varepsilon^2 \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}} \tag{3.35}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{2\varepsilon\left(\frac{w}{w_n}\right)}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}\right) \tag{3.36}$$

3.3.2 Facteur d'amplification : Nous avons vu auparavant que le facteur d'amplification est défini par le rapport de la réponse du système à la déflection statique $\delta_{st} = \frac{f_0}{k}$.

Donc,

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + 4\varepsilon^2 \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}} \tag{3. 37}$$

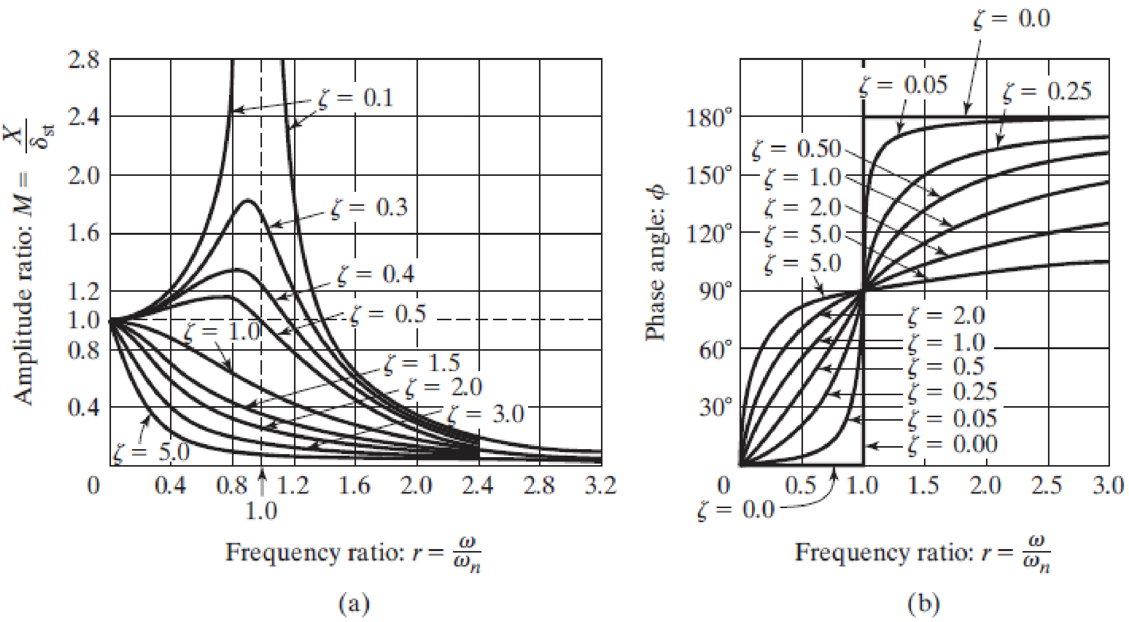


Figure 3. 8: Réponse harmonique pour un système amortie [2]

- **Discussion sur le facteur d'amplification :**

1- Pour un système non amorti, $\varepsilon = 0$, le facteur d'amplification tend vers l'infini lorsque $w = w_n$ c'est la résonnance.

2- L'augmentation dans le facteur d'amortissement entraine une diminution dans le facteur d'amplification.

3- Le facteur d'amplification égal à 1, y'a aucune amplification, lorsque la fréquence de la force d'excitation s'annule $\frac{w}{w_n} = 0$.

4- Pour les fréquences les plus élevés de la force d'excitation, le système ne répond pas à l'excitation ($X = 0$).

5- Réponse maximale **:** la réponse maximal du système à la force d'excitation est donnée par :

$$M_{\max} = \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{3.38}$$

A la résonance ($w = w_n$), la réponse maximal du système à la force d'excitation est devenue

$$M_r = \frac{1}{2\varepsilon} \tag{3. 39}$$

- **Discussion sur la phase :**

1- Pour un système non amortie, $\varepsilon = 0$,

a. pour $0 < \frac{w}{w_n} < 1$, $\varphi = 0$, la réponse et l'excitation sont en phase.

b. pour $\frac{w}{w_n} > 1$, $\varphi = \pi$, la réponse et l'excitation sont en déphasage.

2- Pour un système amortie, $\varepsilon > 0$,

a. pour $0 < \frac{w}{w_n} < 1$, $0 < \varphi < 90^\circ$, la réponse est en retard par rapport à l'excitation.

b. Pour $\frac{w}{w_n} > 1$, $90^\circ < \varphi < 180^\circ$, la réponse conduit l'excitation.

c. Pour $\frac{w}{w_n} = 1$, $\varphi = 90^\circ$.

3.3.3 Facteur de qualité

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que, lorsque ε est faible, le maximum pour le facteur d'amplification est donné par :

$$M_{\max} = \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{1}{2\varepsilon} = \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{w=w_n}$$

le facteur d'amplification lorsque $w = w_n$ s'appelle le facteur de qualité $Q = \frac{1}{2\varepsilon}$.

3.3.4 Bande passante

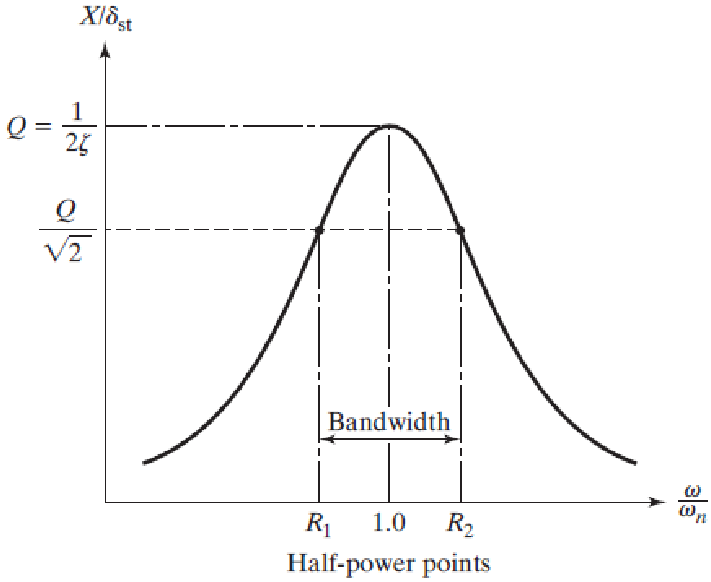


Figure 3. 9 : Bande passante [2]

Si on divise le facteur de qualité sur $\sqrt{2}$ où le facteur d'amplification devient $M = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}$.

La ligne horizontale $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}$ coupe la courbe du facteur de qualité en deux points correspond à w_1 *et* w_2. La différence entre les deux fréquences $(w_2 - w_1)$ s'appelle la bande passante.

Pour trouver w_1 *et* w_2 on utilise $\left(\dfrac{X}{\delta_{st}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}$. Mettant

$$\frac{w}{w_n} = r \Rightarrow r_1 = \frac{w_1}{w_n} \; et \; r_2 = \frac{w_2}{w_n} \qquad (3.\,40)$$

On trouve,

$$r^4 - (2 - 4\varepsilon^2)r^2 + (1 - 8\varepsilon^2) = 0 \qquad (3.41)$$

$\begin{cases} r_1^2 = 1 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2} \\ r_2^2 = 1 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2} \end{cases}$, on peut éliminer ε^2 puisque ε est faible.

$$\begin{cases} r_1^2 = 1 - 2\varepsilon \\ r_2^2 = 1 + 2\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1^2 = (1-2\varepsilon)w_n^2 \\ w_2^2 = (1+2\varepsilon)w_n^2 \end{cases} \Rightarrow w_2^2 - w_1^2 = 4\varepsilon w_n^2$$

$$(w_2 + w_1)(w_2 - w_1) = 4\varepsilon w_n^2 \qquad (3.42)$$

Comme nous avons vu $w_1, w_2 \approx w_n$ on peut écrire $w_1 + w_2 = 2w_n$. L'équation (3.42) peut être écrite,

$$(w_2 - w_1) = 2\varepsilon w_n \Rightarrow 2\varepsilon = \frac{w_2 - w_1}{w_n} \qquad (3.43)$$

On peut écrire le facteur de qualité sous la forme,

$$Q = \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{w_n}{w_2 - w_1} \qquad (3.44)$$

Chapitre 4

Vibrations des systèmes à deux degrés de liberté.

4.1 Introduction

Tout système nécessite deux coordonnées indépendantes pour l'étudier, s'appelle système à deux degré de liberté. Ce type de système a deux battements naturels w_{n1}, w_{n2}. Lorsque le système vibre avec l'un de ses battements naturels, on dit que le système vibre avec l'un de ses propres modes. Autrement dit, le système a deux propre modes de vibrations.

4.2Vibrations libres des systèmes non amortis à deux degrés de liberté.

On prend comme exemple le système de deux pendules identiques, de même longueur et de même masse. Les deux pendules sont reliés avec un ressort de raideur k à une distance a de l'extrémité fixe (fig 4.1).

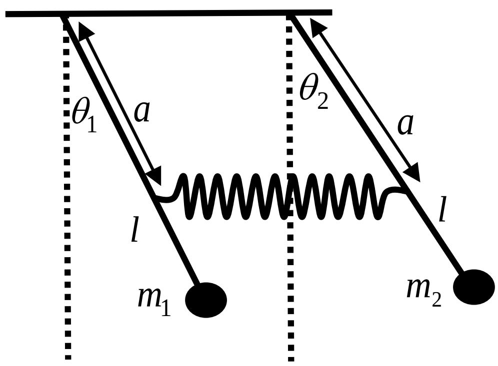


Figure 4.1 : Système à deux degrés de liberté, pendule couplé

4.2.1 Equations du mouvement

On utilise la méthode de Lagrange, pour un système libre non amorti.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{4.1}$$

- $L = T - U$
- $q_i \equiv \begin{cases}\theta_1\\ \theta_2\end{cases}$, les deux coordonnées indépendantes du système.

  - L'énergie cinétique du système est la somme de l'énergie cinétique des deux masses m_1 et m_2

$$T=\frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 \tag{4.2}$$

Pour simplifier l'étude on met $\begin{cases} m_1 = m_2 = m \\ l_1 = l_2 = l\end{cases}$, l'énergie cinétique est écrite comme ;

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 \tag{4.3}$$

- L'énergie potentielle du système est la somme des énergies potentielle des deux masses m_1 et m_2 et l'énergie potentielle du ressort.

$$U=\frac{1}{2}ka^2(\sin\theta_1-\sin\theta_2)^2+mgl(1-\cos\theta_1)+mgl(1-\cos\theta_2)$$

$$\theta \ petit \Rightarrow \begin{cases}\sin\theta\approx\theta\\ \cos\theta\approx 1-\dfrac{\theta^2}{2}\end{cases}$$, Donc,

$$U=\frac{1}{2}ka^2(\theta_1-\theta_2)^2+mgl\frac{\theta_1^2}{2}+mgl\frac{\theta_2^2}{2} \tag{4.4}$$

Le Lagrangien du système est donné par :

$$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2-\frac{1}{2}ka^2(\theta_1-\theta_2)^2-mgl\frac{\theta_1^2}{2}-mgl\frac{\theta_2^2}{2} \tag{4.5}$$

L'équation de Lagrange (4. 1) donne,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \qquad (4.6)$$

Par dérivation et remplacement, on trouve,

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl + ka^2)\theta_1 - ka^2\theta_2 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + (mgl + ka^2)\theta_2 - ka^2\theta_1 = 0 \end{cases} \qquad (4.6)$$

4.2.2 Solution de l'équation et battements propres.

Le mouvement général d'un système à deux degrés de liberté est la superposition de deux mouvements harmoniques simples.

Donc, on cherche la solution où les deux pendules oscillent avec des oscillations harmoniques de même phase, mais avec des amplitudes différentes. La solution est de la forme,

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_1 \cos(w.t + \varphi) \\ \theta_2(t) = \Theta_2 \cos(w.t + \varphi) \end{cases} \qquad (4.7)$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1(t) = -\Theta_1 w^2 \cos(w.t + \varphi) \\ \ddot{\theta}_2(t) = -\Theta_2 w^2 \cos(w.t + \varphi) \end{cases} \qquad (4.8)$$

Par remplacement dans l'équation (4.6),

$$\begin{cases} \left(-ml^2\Theta_1 w^2 + (mgl + ka^2)\Theta_1 - ka^2\Theta_2\right)\cos(w.t + \varphi) = 0 \\ \left(-ml^2\Theta_2 w^2 + (mgl + ka^2)\Theta_2 - ka^2\Theta_1\right)\cos(w.t + \varphi) = 0 \end{cases} \qquad (4.9)$$

$$\begin{cases} \left(-ml^2\Theta_1 w^2 + (mgl + ka^2)\Theta_1 - ka^2\Theta_2\right) = 0 \\ \left(-ml^2\Theta_2 w^2 + (mgl + ka^2)\Theta_2 - ka^2\Theta_1\right) = 0 \end{cases} \qquad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} (-ml^2w^2 + mgl + ka^2) & -ka^2 \\ -ka^2 & (-ml^2w^2 + mgl + ka^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.11)$$

La matrice des amplitudes ne doit pas s'annuler (car il y'a du mouvement), donc, la première matrice qui doit s'annuler.

$$\begin{bmatrix} (-ml^2w^2 + mgl + ka^2) & -ka^2 \\ -ka^2 & (-ml^2w^2 + mgl + ka^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Donc, le déterminant est nul,

$$(-ml^2w^2 + mgl + ka^2)^2 - k^2a^4 = 0 \tag{4.13}$$

$$m^2l^4w^4 - (2m^2l^3g + 2l^2mka^2)w^2 + m^2l^2g^2 + 2mglka^2 - k^2a^4 + k^2a^4 = 0 \tag{4.14}$$

$$w^4 - \left(2\frac{g}{l} + 2\frac{ka^2}{ml^2}\right)w^2 + \left(\frac{g^2}{l^2} + 2\frac{gka^2}{ml^3}\right) = 0$$

Posant

$$\begin{cases} x = w^2 \\ a = 1, \qquad b = \left(2\dfrac{g}{l} + 2\dfrac{ka^2}{ml^2}\right), \qquad c = \left(\dfrac{g^2}{l^2} + 2\dfrac{gka^2}{ml^3}\right) \end{cases}$$

On peut écrire,

$$\begin{cases} w_1^2 = -\dfrac{b}{2} - \left[\left(\dfrac{b}{2}\right) - c\right]^{\frac{1}{2}} \\ w_2^2 = -\dfrac{b}{2} + \left[\left(\dfrac{b}{2}\right) - c\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{4.15}$$

- **Battement propres**

Par remplacement et simplification on trouve,

$$w_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad w_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{ka^2}{ml^2}} \tag{4.16}$$

Comme nous avons dit auparavant, si le système oscille avec l'une de ses battements naturels, on dit que le système oscille avec l'un de ses propres modes. Dans chaque propre mode, les pendules oscillent avec une oscillation harmonique simple.

On peut écrire pour chaque pendule deux solutions particulière correspondants aux deux battements naturels.

- Pour le premier pendule : $\begin{cases} \theta_1'(t) = \Theta_{11}\cos(w_1.t+\varphi_1) \\ \theta_1''(t) = \Theta_{12}\cos(w_2.t+\varphi_2) \end{cases}$.
- Pour le deuxième pendule : $\begin{cases} \theta_2'(t) = \Theta_{21}\cos(w_1.t+\varphi_1) \\ \theta_2''(t) = \Theta_{22}\cos(w_2.t+\varphi_2) \end{cases}$.

Nous avons dit plus haut, que le mouvement du système est la superposition des deux mouvements harmoniques, donc la solution des équations du mouvement est donnée par (4.17) :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_{11}\cos(w_1.t+\varphi_1) + \Theta_{12}\cos(w_2.t+\varphi_2) \\ \theta_2(t) = \Theta_{21}\cos(w_1.t+\varphi_1) + \Theta_{22}\cos(w_2.t+\varphi_2) \end{cases} \tag{4.17}$$

Pour trouver la relation entre $\Theta_{11}, \Theta_{12}, \Theta_{21}$ *et* Θ_{22} on suppose que le système oscille avec l'un de ses propre mode w_1, puis w_2.

- **1$^{\text{ier}}$cas** $w = w_1 \Rightarrow \quad \Theta_{12} = \Theta_{22} = 0$.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_{11}\cos(w_1.t+\varphi_1) \\ \theta_2(t) = \Theta_{21}\cos(w_1.t+\varphi_1) \end{cases}$$

Tant que la solution particulière vérifie l'équation (4.14). Par dérivation et remplacement, on trouve,

$$(-ml^2\frac{g}{l} + mgl + ka^2)\Theta_{11} - ka^2\Theta_{22} = 0$$

$$ka^2(\Theta_{11} - \Theta_{22}) = 0$$

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Theta_{11}}{\Theta_{22}} = 1 \tag{4.18}$$

- **2$^{\text{ème}}$cas** $w = w_2 \Rightarrow \quad \Theta_{11} = \Theta_{21} = 0$.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_{12}\cos(w_2.t+\varphi_2) \\ \theta_2(t) = \Theta_{22}\cos(w_2.t+\varphi_2) \end{cases}$$

Tant que la solution est particulière vérifie l'équation (4.14),par dérivation et remplacement, on trouve,

$$(-ml^2\frac{g}{l^2}+\frac{2ml^2ka^2}{ml^2}+mgl+ka^2)\Theta_{12}-ka^2\Theta_{22}=0$$

$$-ka^2(\Theta_{12}+\Theta_{22})=0 \quad \Rightarrow \quad \Theta_{11}=-\Theta_{22}$$

$$\frac{\Theta_{11}}{\Theta_{22}}=-1 \tag{4.19}$$

A la fin, puisque la solution générale est la somme des deux solutions particulières, on écrit la ***solution générale***.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_{11}\cos(w_1.t+\varphi_1)+\Theta_{12}\cos(w_2.t+\varphi_2) \\ \theta_2(t) = \Theta_{11}\cos(w_1.t+\varphi_1)-\Theta_{12}\cos(w_2.t+\varphi_2) \end{cases} \tag{4.20}$$

Les quatre inconnus Θ_{11}, Θ_{12}, φ_1 *et* φ_2 peuvent être trouvés à partir des conditions initiales.

$$t=0\begin{cases} \theta_1=\theta_{10} \\ \theta_2=\theta_{20} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \dot\theta_1=\dot\theta_{10} \\ \dot\theta_2=\dot\theta_{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta_{11}\cos\varphi_1+\Theta_{12}\cos\varphi_2=\theta_{10} \\ \Theta_{11}\cos\varphi_1-\Theta_{12}\cos\varphi_2=\theta_{20} \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\begin{cases} -\Theta_{11}w_1\sin\varphi_1-\Theta_{12}w_2\sin\varphi_2=\dot\theta_{10} \\ -\Theta_{11}w_1\sin\varphi_1+\Theta_{12}w_2\sin\varphi_2=\dot\theta_{20} \end{cases} \tag{4.22}$$

$$\begin{cases} \Theta_{11}\cos\varphi_1=\dfrac{\theta_{10}+\theta_{20}}{2} \\ \Theta_{12}\cos\varphi_2=\dfrac{\theta_{10}-\theta_{20}}{2} \end{cases} \tag{4.23}$$

$$\begin{cases} \Theta_{11}\sin\varphi_1 = -\dfrac{\dot{\theta}_{10}+\dot{\theta}_{20}}{2w_1} \\ \Theta_{12}\sin\varphi_2 = \dfrac{\dot{\theta}_{20}-\dot{\theta}_{10}}{2w_2} \end{cases} \tag{4.24}$$

En fin on peut écrire les quatre inconnues,

$$\Theta_{11} = \left[\left(\frac{\theta_{10}+\theta_{20}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_{10}+\dot{\theta}_{20}}{2w_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \Theta_{12} = \left[\left(\frac{\theta_{10}-\theta_{20}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_{20}-\dot{\theta}_{10}}{2w_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(-\frac{\dot{\theta}_{10}+\dot{\theta}_{20}}{w_1(\theta_{10}+\theta_{20})}\right), \quad \varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{\theta}_{10}-\dot{\theta}_{20}}{w_2(\theta_{20}-\theta_{10})}\right).$$

4.2.3 Cas particuliers

Pour simplifier l'étude on considère que les vitesses initiales sont nulles

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$$

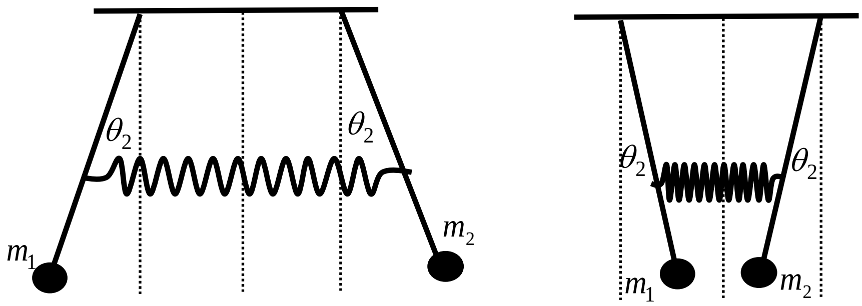
De l'équation (4.24), on trouve que,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

- **1ère cas**

$$\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_0\cos(w_1.t) \\ \theta_2 = \theta_0\cos(w_1.t) \end{cases} \tag{4.25}$$

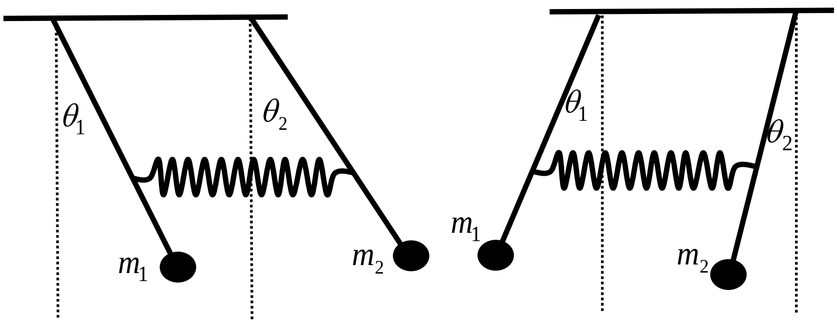
Les deux masses oscillent avec le premier battement naturel dans le même sens. Dans ce cas la longueur du ressort reste constante.



- **2ème cas**

$$\theta_{10} = -\theta_{20} = \theta_0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_0 \cos(w_2.t) \\ \theta_2 = -\theta_0 \cos(w_2.t) \end{cases} \tag{4.26}$$

Les deux masses oscillent avec le deuxième battement naturel dans un sens opposé. Dans ce cas le milieu du ressort reste émouvant.



- **3ème cas**

$$\theta_{10} = \theta_0, \quad \theta_{20} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\theta_0}{2}\cos(w_1.t) + \dfrac{\theta_0}{2}\cos(w_2.t) \\ \theta_2 = \dfrac{\theta_0}{2}\cos(w_1.t) - \dfrac{\theta_0}{2}\cos(w_2.t) \end{cases} \tag{4.27}$$

Au départ, la première masse a une énergie initiale non nulle contrairement à la deuxième masse. Au cours du temps, l'énergie se passe de la première masse à la deuxième jusque l'énergie de première masse s'annule (toute l'énergie dans la deuxième masse), ensuite l'énergie passe de la deuxième masse à la première jusque s'annule et vice-versa.

4.3Vibrations forcées des systèmes non amortis à deux degrés de liberté.

On s'intéresse à l'étude d'un système soumis à une force d'excitation extérieure harmonique simple. L'excitation harmonique peut être écrite sous la forme $f(t) = f_0 e^{iwt}$

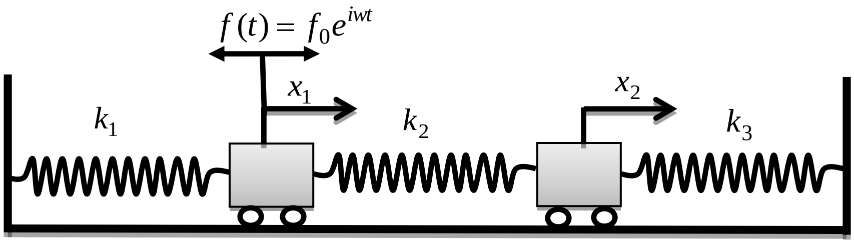


Figure 4.2 : Système forcé à deux degrés de libertés, deux masses trois ressorts

4.2.1Réponse du système

Par l'application de la théorie de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_q(t) \tag{4.28}$$

- $L = T - U$
- $q_i \equiv \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$, les deux coordonnées indépendantes du système.

➢ L'énergie cinétique du système est la somme de l'énergie cinétique des deux masses m_1 et m_2

$$T = \frac{1}{2} m_1 x_1^2 + \frac{1}{2} m_2 x_2^2 \tag{4.29}$$

➢ L'énergie potentielle du système est la somme des énergies potentielle des trois ressorts.

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1{}^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \tag{4.30}$$

Le Lagrangien du système est donné par :

$$L = \frac{1}{2}m_1 x_1^2 + \frac{1}{2}m_2 x_2^2 - \left(\frac{1}{2}k_1 {x_1}^2 + \frac{1}{2}k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2\right) \tag{4.31}$$

L'équation de Lagrange (4. 1) donne,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = f_{10}e^{iwt} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = f_{20}e^{iwt} \end{cases} \tag{4.32}$$

Par dérivation et remplacement on trouve,

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_{10}e^{iwt} \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = f_{20}e^{iwt} \end{cases} \tag{4.33}$$

Pour simplifier l'étude, on suppose $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, la solution sera sous la forme,

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 e^{iwt} \\ x_2(t) = A_2 e^{iwt} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -w^2 A_1 e^{iwt} \\ \ddot{x}_2(t) = -w^2 A_2 e^{iwt} \end{cases}$$

Par remplacement, on trouve,

$$\begin{cases} (-m_1 w^2 + k_1 + k_2)A_1 - k_2 A_2 = f_{10} \\ -k_2 A_1 + (-m_2 w^2 + k_2 + k_3)A_2 = f_{20} \end{cases} \tag{4.34}$$

Les équations précédentes peuvent écrite sous une forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} (-m_1 w^2 + k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-m_2 w^2 + k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Rappel :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ avec } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\text{Déterminant}}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Donc,

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (-m_1w^2+k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-m_2w^2+k_2+k_3) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{(-m_1w^2+(k_1+k_2)(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2}\begin{bmatrix} (-m_2w^2+k_2+k_3) & k_2 \\ k_2 & (-m_1w^2+k_1+k_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} A_1=\dfrac{(-m_2w^2+k_2+k_3)\,f_{10}+k_2\,f_{20}}{(-m_1w^2+(k_1+k_2))(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2} \\ A_2=\dfrac{k_2\,f_{10}+(-m_1w^2+k_1+k_2)\,f_{20}}{(-m_1w^2+(k_1+k_2))(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2} \end{cases} \tag{4.36}$$

Remarque :

Si les masses oscillent librement (les forces sont nulles), donc le déterminant sera nulle.

$$\begin{bmatrix} (-m_1w^2+k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-m_2w^2+k_2+k_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(-m_1w^2+(k_1+k_2))(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2=0$$

On trouve deux battements propres :

$$w_{1,2}^2 = \frac{m_1(k_1+k_2)+m_2(k_2+k_3)}{2m_1m_2} \mp \left[\left(\frac{m_1(k_1+k_2)+m_2(k_2+k_3)}{2m_1m_2}\right)^2 - \frac{(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2}{m_1m_2}\right]^{1/2}$$

Dans la plus part des cas, la force d'excitation est toujours appliquée sur une seule masse.

Par exemple, $f_{10} = f_0, \quad f_{20} = 0$.

On peut récrire les amplitudes (la réponse des deux masses à la force d'excitation) A_1 *et* A_2,

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{(-m_2w^2+k_2+k_3)}{(-m_1w^2+(k_1+k_2))(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2}\, f_0 \\ A_2 = \dfrac{k_2}{(-m_1w^2+(k_1+k_2))(-m_2w^2+(k_2+k_3))-k_2^2}\, f_0 \end{cases} \tag{4.37}$$

4.2.2 Facteurs d'amplifications

Dans le cas où $k_1 = k_2 = k_3 = k, \quad m_1 = m_2 = m$

$$w_1^2 = \frac{k}{m}, \qquad w_2^2 = 3\frac{k}{m}$$

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{(-mw^2+2k)}{(-mw^2+2k)(-mw^2+2k)-k^2}\, f_0 \\ A_2 = \dfrac{k}{(-m_1w^2+2k)(-mw^2+2k)-k^2}\, f_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(-mw^2+2k)}{(-mw^2+k)(-mw^2+3k)}\, f_0 \\ A_2 &= \frac{k}{(-m_1w^2+k)(-mw^2+3k)}\, f_0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

On multiplie le dénominateur et le numérateur par $\frac{k}{m^2}$ on trouve,

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{(2-(\frac{w}{w_1})^2)}{k((\frac{w_2}{w_1})^2-(\frac{w}{w_1})^2)(1-(\frac{w}{w_1})^2)}\delta st \\ A_2 = \dfrac{1}{k((\frac{w_2}{w_1})^2-(\frac{w}{w_1})^2)(1-(\frac{w}{w_1})^2)}\delta st \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\begin{cases} \dfrac{A_1}{\delta st} = \dfrac{(2-(\frac{w}{w_1})^2)}{k((\frac{w_2}{w_1})^2-(\frac{w}{w_1})^2)(1-(\frac{w}{w_1})^2)} \\ \dfrac{A_2}{\delta st} = \dfrac{1}{k((\frac{w_2}{w_1})^2-(\frac{w}{w_1})^2)(1-(\frac{w}{w_1})^2)} \end{cases} \quad (4.39)$$

Les réponses des masses M_1 et M_2 en fonction du w/w_1 sont représentées sur la figure 4.3 a et b respectivement. La force d'excitation est appliquée sur la masse M_1.

- On peut directement remarquer que la réponse des deux masse tends vers l'infinie pour w_1 et w_2, le système a deux battements naturels ça veut dire qu'il y a deux points de résonances. La masse M_1 raisonne en w_1 et en w_2 ainsi que la masse M_2 raisonne en w_1 et en w_2.

- $w<w_1$: si le battement de la force d'excitation est inférieur au premier battement naturel, la réponse des deux masses est positive (la réponse et l'excitation sont en phase)

- $w_1<w<w_2$: pour les valeurs du battement de la force d'excitation supérieurs à w_1 la réponse de la masse M_1 est négative (excitation et réponse sont déphasage) et se diminue avec w jusque s'annule pour certain valeur de w et puis s'augment positivement (la réponse devient en phase avec l'excitation). La réponse de la masse M_2 est toujours en déphasage avec l'excitation. Après w_1 la réponse se diminue jusqu'à une valeur donnée puis s'augmente avec w jusqu'à l'infinie à w_2 (la résonance à w_2).

- $w>w_2$: il est claire que la réponse de M_1 est en déphasage tandis que la réponse de M_2 est en phase avec l'excitation, mais les deux réponses tendent vers zéro pour les plus grandes valeurs de w (aucune réponse pour les deux masses).

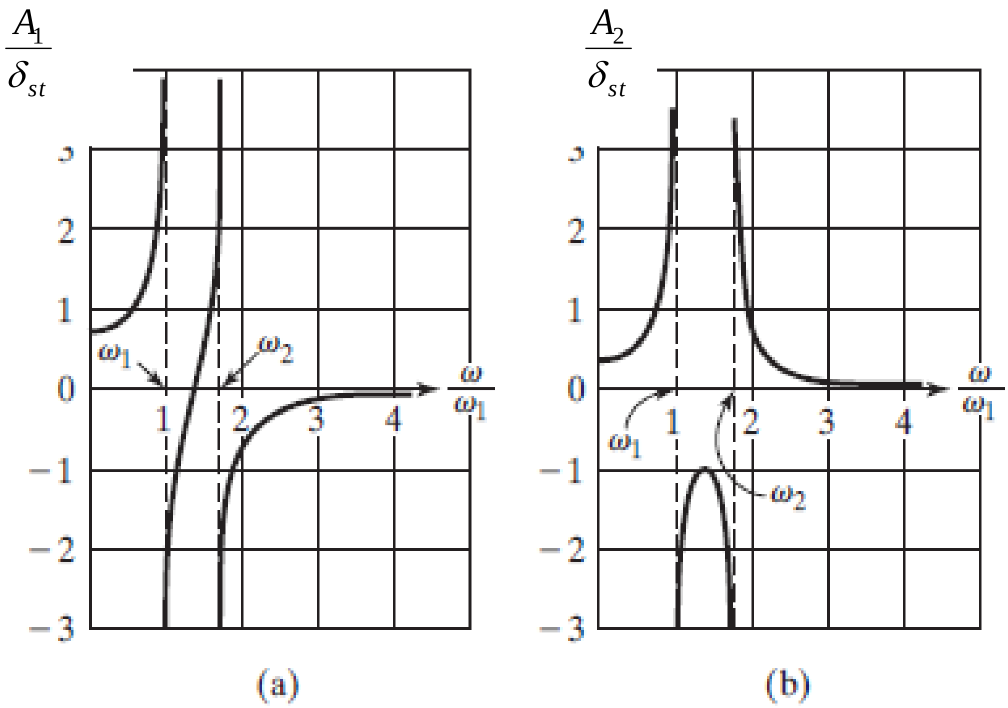


Figure 4.3 : Facteurs d'amplifications non amortie d'un système à deux degrés de libertés [2]

Annexe 1

Formalisme de Lagrange

1. Démonstration de l'équation de Lagrange

Considérons un système constitué de N points matériels (N masses). Si l'on suppose que chaque point a n coordonnées généralisée (q_n), les vecteurs positions peuvent être s'écrire comme,

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1 \ldots q_n, t)$$
$$.$$
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \ldots q_n, t) \quad \text{(A1.1)}$$
$$.$$
$$\vec{r}_n = \vec{r}_N(q_1 \ldots q_n, t)$$

- Le déplacement del'énième vecteur position $d\vec{r}_i$ est donné par :

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt \quad \text{(A1.2)}$$

- et le déplacement virtuel est donné par,

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j \; . \quad \text{(A1.3)}$$

De la relation 2 on peut tirer la formule de la vitesse qui sera donner par,

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\delta q_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \qquad \dot{q} = \frac{\delta q_j}{dt}$$

$$\vec{v}_i == \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad \text{(A1.4)}$$

Maintenant, si je prends la dérivé du vecteur position (de la relation A1.2) par apport à la coordonnée q_j j'obtiens,

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{A1.5}$$

Et si je prends la dérivé du vecteurvitesse (de la relation A1.4) par apport à la vitesse généralisée $\dot{q}_j$ j'obtiens,

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{A1.6}$$

Des relations 5 et 6 on peut écrire,

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{A1.7}$$

- On peut écrire aussi,

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial t}\right)$, où $\vec{r}$ est donné par la relation (A1.1).

Donc,

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} dt\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} dt\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_j} \frac{\partial q_j}{dt} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t}\right)$$

On constate que le terme entre la parenthèse est la vitesse $\vec{v}_i$ (A1.4) on peut écrire,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \qquad \text{(A1.8)}$$

- Partons du principe de d'Alembert

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F} - m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)\delta\vec{r}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N}\vec{F}\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\delta\vec{r}_i \qquad \text{(A1.9)}$$

Ici la force $\vec{F}$ est la résultante de toutes les forces agissantes sur le système.

Remplaçons par $\delta\vec{r}_i$ (A1.3), on obtient

$$\sum_{1=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\vec{F}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}dq_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}dq_j \qquad \text{(A1.10)}$$

On peut écrire le premier terme par :

$$\sum_{j=1}^{n}\vec{F}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}dq_j = Q_j dq_j,$$

Où Q_j est la force généralisé conjugué de la coordonnée généralisée q_j.

$$Q_j = \vec{F}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Alors la relation 10 peut être reformulé par :

$$\sum_{j=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}dq_j = Q_j dq_j \qquad \text{(A1.11)}$$

- On cherche à quoi égal le premier terme dans (A1.11).

Nous avons,

$$\sum_{j=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_{j=1}^{n} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j .$$

Si on prend,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j = \sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j + \sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j \quad \text{(A1.12)}$$

Et par suite on obtient,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right) dq_j - \sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right) dq_j$$

Alors,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right) dq_j - \sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right) dq_j .$$

De la relation (A1.7), on remplace $\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$ dans le premier terme du deuxième membre de la relation précédente et de la relation (8) on remplace $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$.

En fin,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)\right) dq_j - \sum_{j=1}^{n}\left(m_i \vec{v}_i \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right)\right) dq_j \quad \text{(A1.13)}$$

On peut écrire,

$$v_i^{\,2} = \vec{v}_i.\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial q_j}(\vec{v}_i\vec{v}_i) = \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right)\vec{v}_i + \vec{v}_i\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right)$$

$$m_i\vec{v}_i\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{1}{2}m_i v_i^{\ 2}=T_i \tag{A1.14}$$

Et

$$v_i^{\ 2}=\vec{v}_i.\vec{v}_i \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\vec{v}_i\vec{v}_i\right)=\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)\vec{v}_i+\vec{v}_i\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$$m_i\vec{v}_i\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)=\frac{1}{2}m_i v_i^{\ 2}=T_i \tag{A1.15}$$

L'énergie cinétique totale du système sera donnée par :

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^{\ 2} \tag{A1.16}$$

Par remplacement des relations (13), (14) et (15) dans (12) on trouve,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)dq_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\right)dq_j-\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\right)dq_j \tag{A1.17}$$

Remplaçons le premier membre de l'équation par la force généralisée donnée par (A1.11), et donc le principe de d'Alembert peut être s'écrire sous la forme suivante.

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\right]dq_j=Q_j dq_j$$

Ou,

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\right]=Q_j \tag{A1.18}$$

L'équation (A1.18) est connue comme l'équation de Lagrange.

Les coordonnées généralisées doivent être indépendantes et par suite on peut récrire cette relation pour chaque coordonnée par,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)=Q_j \qquad \text{(A1.19)}$$

2. Cas particuliers

2.1 Toutes les forces généralisées sont dérivées de potentiel

Si l'on considère que toutes les forces dérivent d'un potentiel, on peut écrire

$$Q_j=-\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad \text{(A1.20)}$$

Où

$$U=\sum_{i=1}^{N}U_i$$

On remplace (20) dans (19),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)+\frac{\partial U}{\partial q_j}=0$$

On peut écrire aussi,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial q_j}\right)=0$$

Puisque l'énergie potentille ne dépend pas des vitesses $\dot{q}_j$ (elle est fonction des q_j), ça veut dire que $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}=0$. on peut ajouter ce terme au premier terme de (20)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial (T-U)}{\partial q_j}=0 \qquad \text{(A1.21)}$$

La quantité $L=T-U$ est connue sous le nom de l'équation **d'Euler-Lagrange** ou le lagrangien du système. Alors la***première équation de Lagrange***

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0} \qquad \text{(A1.22)}$$

2.2 Les forces généralisées sont des forces dérivées du potentiel plus des forces frottements.

Généralement, dans ce cours on s'intéresse seulement à des forces des frottements visqueuses de la forme $\vec{f}=-c\vec{v}$. c est le coefficient de frottement et $\vec{v}$ la vitesse.

Dans ce cas l'équation de Lagrange sera écrite comme,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=F_{q_j} \qquad \text{(A1.23)}$$

$F_{q_j}=\vec{f}\,\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$ est la force généralisée conjuguée de q_j , alors

$$F_{q_j}=-c\frac{\partial \vec{r}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}=-c\frac{\partial \vec{r}}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial q_j}=-c\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{dt},$$

$$F_{q_j}=-c\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right)^2\dot{q}_j=-c\beta\dot{q}_j, \quad où \qquad \beta=\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right)^2$$

L'équation de Lagrange peut être s'écrire sous la forme,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=-c\beta\dot{q}_j \qquad \text{(A1.24)}$$

L'équation (A1.24) est connue comme la deuxième équation de Lagrange. Cette équation peut être écrite sous une autre forme.

2.3 fonction de dissipation

Lors du frottement dans l'intervalle de temps dt, il y a une quantité de l'énergie dégagée au milieu extérieur sous forme de chaleur donnée par,

$$\delta Q=cv^2dt \qquad \text{(A1.25)}$$

La puissance de dissipation P est définie par :

$$P = \frac{\delta Q}{dt} = cv^2$$

La puissance de dissipation P peut être écrite par :

$$P = c\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = c\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right)^2 \dot{q}_j^{\,2} = c\beta \dot{q}_j^{\,2} \qquad \text{(A1.26)}$$

La fonction de dissipation est définie comme la moitié de la puissance de dissipation. Donc,

$$D = \frac{P}{2} = c\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = c\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right)^2 \dot{q}^{\,2} = \frac{1}{2} c\beta \dot{q}^{\,2}$$

On peut écrire le deuxième membre de la deuxième équation de Lagrange (A1.24) par :

$$-c\beta\dot{q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \qquad \text{(A1.27)}$$

En fin la ***deuxième équation de Lagrange***peut s'écrire par la forme :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0} \qquad \text{(A1.28)}$$

2.1 Les forces généralisées sont des forces dérivées du potentiel plus des forces frottements plus des forces dépendent du temps.

Dans ce cas il reste dans le deuxième membre la force extérieure conjuguée de la coordonnée généralisée q_j. **La *troisième équation de Lagrange donnée par :***

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = F_{q_j}^{ex}} \qquad \text{(A1.29)}$$

NB : dans le cas d'un système de n degrés de liberté on trouve n équations de Lagrange peuvent être s'écrire par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = F_{q_1}^{ex} \\ . \\ . \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{q_i}^{ex} \\ . \\ . \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n} = F_{q}^{ex} \end{cases} \tag{A1.30}$$

Annexe 2

Equations différentielles linéaires du deuxième ordre avec des coefficients constantes

1. Définition

On dit qu'une équation différentielle est linéaire d'ordre n, si elle est du premier ordrede la fonction y et ses dérivations. Elle écrit sous la forme,

$$y^{[n]} + g_1(x)y^{[n-1]} + ...g_n(x)y = f(x) \qquad \text{(A2.1)}$$

$y^{[n]}$: L'énième dérivé de y par rapport à x.

$g_i(x)$: Fonction de la variable x (dites coefficients variables).

$f(x)$: Fonction de la variable x (dite deuxième membre).

2. Equation différentielle homogène du deuxième ordre avec coefficients constantes

- Si $n = 2$, l'équation différentielle est du deuxième ordre, elle s'écrit sous la forme,

$$y'' + g_1(x)y' + g_2(x)y = f(x) \qquad \text{(A2.2)}$$

- Si $f(x) = 0$ l'équation différentielle est dite homogène, donc l'équation différentielle homogène du deuxième ordre s'écrit sous la forme,

$$y'' + g_1(x)y' + g_2(x)y = 0 \qquad \text{(A2.3)}$$

- Si $g_1(x) = b$ et $g_2(x) = c$, l'équation différentielle est dite avec coefficients constantes, donc *l'équation différentielle homogène du deuxième ordre avec coefficients constantes s'écrit sous la forme,*

$$y'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(A2.4)}$$

Théorème 1 :si y_1 *et* y_2 sont deux solutions particulières de l'équation (A2.4), $y_1 + y_2$ est aussi une solution. Nous avons,

$$y_1'' + by_1' + cy_1 = 0$$

$$y_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

$$(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)_1' + c(y_1 + y_2) = 0$$

$$\left(y_1'' + by_1' + cy_1\right) + \left(y_2'' + by_2' + cy_2\right) = 0 + 0 = 0$$

Donc, $y_1 + y_2$ est une solution pour l'équation (A2.4˙).

Définition : on dit que les solutions y_1 *et* y_2 sont linéairement indépendantes si

$$\frac{y_1}{y_2} \neq c$$

dans le cas contraire, les deux solutions sont linéairement dépendantes.

Exemple :

$$y'' - y' = 0 \qquad \text{(A2.5)}$$

On peut proposer $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x},\ y_3 = 3e^x$ comme des solutions particulières pour l'équation (5). Il est claire que,

- $\frac{y_2}{y_1} = e^{-2x} \neq c$, on dit que y_1 *et* y_2 sont linéairement indépendantes.
- $\frac{y_3}{y_1} = 3 = c$, on dit que y_1 *et* y_2 sont linéairement dépendantes.

Théorème 2: si les solutions particulières y_1 *et* y_2 sont linéairement indépendantes, la solution générale de l'équation (4) est:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad \text{(A2.6)}$$

c_1 et c_2, sont des constantes peuvent être trouver des conditions initiales.

2. 1. Solution de l'équation différentielle homogène du deuxième ordre avec coefficients constantes

On cherche une solution de la forme $y = e^{\lambda x}$.

Nous avons $y' = \lambda e^{\lambda x}$ et $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, par remplacement dans l'équation (A2.4) on trouve,

$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0$. Donc la solution proposée $y = e^{\lambda x}$ est une solution de l'équation (4) seulement si λ est une solution de l'équation caractéristique $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

les solutions de l'équation caractéristique sont:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{b}{2} + \sqrt{\dfrac{b^2}{4} - c} \\ \lambda_2 = -\dfrac{b}{2} - \sqrt{\dfrac{b^2}{4} - c} \end{cases}$$

On distingue trois cas: λ_1 *et* λ_2 sont racines réelles, λ_1 *et* λ_2 sont des racines imaginaires et $\lambda_1 = \lambda_2$ racine réelle double.

1ier cas λ_1 *et* λ_2 racines réelles $\Delta > 0$

Si on met $\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)} \neq const$, les deux solutions sont linéairement indépendantes.

Selon la théorème 2, la solution générale est de la forme $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Donc,

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{A2.7}$$

Exemple :

$y'' + y' - 2y = 0$, $\begin{cases} b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$, L'équation caractéristique correspond est : $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac\,,\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta = 9\,,$$ deux solutions réelles, $\lambda_1 = 1 \quad et \quad \lambda_2 - 2$.

La solution générale de cette équation est

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} \tag{A2.8}$$

$c_1\ et\ c_2$ seront déterminées des conditions initiales.

2^eme^ cas $\lambda_1\ et\ \lambda_2$ racines imaginaires $\Delta < 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{b}{2} + i\sqrt{c - \dfrac{b^2}{4}} \\ \lambda_2 = -\dfrac{b}{2} - i\sqrt{c - \dfrac{b^2}{4}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_1 = \alpha - \beta \end{cases},$$

Les deux solutions particulières sont $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)}\ et\ y_2 = e^{(\alpha - i\beta)}$. Les solutions sont des fonctions complexes pour des variables réelles.

Si une fonction complexe d'une variable réelle $y = u(x) + iv(x)$, est une solution de l'équation (4), par dérivation et remplacement on trouve,

$$\big(u(x) + iv(x)\big)'' + b\big(u(x) + iv(x)\big)' + c\big(u(x) + iv(x)\big) = 0 \tag{A2.9}$$

$$(u''(x) + bu'(x) + cu(x)) + i(v''(x) + bv'(x) + cv(x)) = 0 \tag{A2.10}$$

$$\begin{cases} u''(x) + bu'(x) + cu(x) = 0 \\ v''(x) + bv'(x) + cv(x) = 0 \end{cases} \tag{A2.11}$$

On conclut que $u(x)\ et\ v(x)$, sont des solutions pour l'équation (4).

Nôtres deux solutions particulières sont :

$$\begin{cases} y_1 = e^{(\alpha + i\beta)} \\ y_2 = e^{(\alpha - i\beta)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x \\ y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x \end{cases} \tag{A2.12}$$

Comme nous avons conclu plus haut, les fonctions $y_1^* = e^{\alpha x}\cos\beta x \; et \; y_2^* = e^{\alpha x}\sin\beta x$ sont des solutions particulières de l'équation (4). En plus $\frac{y_2^*}{y_1^*} \neq cons$ (linéairement indépendantes), ainsi, la solution générale de l'équation (4) peut être donnée par ;

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right) \tag{A2.13}$$

$c_1 \; et \; c_2$ seront déterminées des conditions initiales.

Exemple :

Trouver la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$ lorsque à $x = 0\begin{cases} y = 0 \\ y' = 1 \end{cases}$

Solution :

L'équation caractéristique correspond à cette équation différentielle est donnée par :

$$\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$$

$$\Delta = -16 = (4i)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \pm 4i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 + 2i \\ \lambda_2 = -1 - 2i \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1 \; et \; \beta = 2$$

Ainsi, la solution générale sera :

$$y = e^{-x}\left(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x\right)$$

Des conditions initiales ;

- $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^0\left(c_1\cos 0 + c_2\sin 0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$. Donc la solution est récrite sous la forme ;

$$y = c_2 e^{-x}\sin 2x$$

- $y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2e^0 c_2\cos 0 - e^0 c_2\sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2}$.

En fin la solution générale de l'équation proposée est ;

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x .$$

3^eme cas $\lambda_1 = \lambda_2$ racine réelle double $\Delta = 0$

Dans ce cas $\lambda_1 = \lambda_2$, donc, Nous avons une seule solution particulière $y_1 = e^{\lambda x}$, par suite nous devons chercher une autre solution particulière y_2 linéairement indépendante avec y_1 pour trouver la solution générale sous la forme $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

On cherche la deuxième solution particulière de la forme $y_2 = u(x) e^{\lambda x}$.

Par dérivation et remplacement dans l'équation (4), on trouve,

$$e^{\lambda x}\left(u''(x) + 2\lambda u'(x) + \lambda^2 u(x)\right) + be^{\lambda x}\left(u'(x) + \lambda^2 u(x)\right) + cu(x)e^{\lambda x} = 0 \qquad \text{(A2.14)}$$

$$u''(x) + (2\lambda + b)u'(x) + (\lambda^2 + b\lambda + c)u(x) = 0 \qquad \text{(A215)}$$

Nous avons $\begin{cases} (2\lambda + b) = 0, \ parseque\ \lambda\ est\ racine\ double. \\ (\lambda^2 + b\lambda + c) = 0, \ parseque\ \lambda\ est\ racine. \end{cases}$

On déduit que $u''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = a_1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = a_1 x + a_2$

On peut prendre $a_1 = 1 \quad et \quad a_2 = 0$, ainsi, $u(x) = x$ et par suit, $y_2 = xe^{\lambda x}$

Comme nous avons $\dfrac{y_2}{y_1} = x \neq cont$, donc, $y_1\ et\ y_2$ sont linéairement indépendante. La solution générale sera donnée par :

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} \qquad \text{(A2.16)}$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x} \qquad \text{(A2.17)}$$

2. 1. Solution de l'équation différentielle non homogène du deuxième ordre avec coefficients constantes

L'équation différentielle non homogène du deuxième ordre avec coefficients constantes est donnée par,

$$y'' + by' + cy = f(x) \tag{A2.18}$$

La solution générale de cette équation est la somme de :

- la solution générale y_g de l'équation homogène (ie: $f(x) = 0$).

- une solution particulière y_p pour l'équation non homogène.

$$y = y_g + y_p \tag{A2.19}$$

Pour déterminer y_g il faut seulement retourner aux paragraphes précédents. Il nous reste comment proposer une solution particulière y_p. Pour ce fait on s'intéresse à deux cas particuliers, lorsque le deuxième membre de l'équation non homogène s'écrit sou la forme $f(x) = P_n e^{\alpha x}$ ou,

$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$,

où $P_n(x)\ et\ Q_m(x)$ sont des polynôme d'ordre n et m .

1[ier] cas $f(x) = P_n e^{\alpha x}$

L'équation s'écrit par :

$$y'' + by' + cy = P_n e^{\alpha x} \tag{A2.20}$$

On trouve trois cas particulier :

a. α**, n'est pas une solution pour l'équation caractéristique**, $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, correspondente à l'équation différentielle homogène (i.e $\alpha \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$).

On cherche une solution particulière de la forme,

$$y_p = Q_n(x)e^{\alpha x}$$

$Q_n(x) = A_0 + A_1 x + ... A_n x^n$, est un polynôme de même ordre que $P_n(x)$.

Par dérivation et remplacement dans l'équation (20), on trouve,

$$Q_n''(x) + (2\alpha + b)Q_n'(x) + (\alpha^2 + b\alpha + c)Q_n(x) = P_n(x) \qquad \text{(A2.21)}$$

Comparant les deux membres, on trouve les coefficients $A_0, A_1, ...$

Exemple :

$y'' + 4y' + 3y = x$

On peut écrire l'équation sous la forme

$y'' + 4y' + 3y = xe^{0x} = P(x)e^{\alpha x}$, dans ce cas $\alpha = 0$ et $P(x) = x$.

La solution de cette équation est la somme de la solution de l'équation homogène et la solution particulière.

1- solution général de l'équation homogène $y'' + 4y' + 3y = 0$:

L'équation caractéristique correspondante est $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ donc, $\lambda_1 = -1, \, et \, \lambda_2 = -3$

La solution générale de l'équation homogène est :

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

2- solution particulière de l'équation non homogène $y'' + 4y' + 3y = x$

Le deuxième membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x} \Rightarrow \begin{cases} P(x) = x \; (premier \; ordre) \\ \alpha = 0, \, (\alpha \neq \lambda_1 \neq \lambda_2) \end{cases}$

Par suite la solution particulière y_p cherchée est de la forme, $y_p = Q_1(x)e^{\alpha x} = Q_1(x) = A_0 + A_1 x$, ($Q(x)$ est du premier ordre puisque $P(x)$ est du premier ordre). Alors,

$$y_p = Q(x)e^{\alpha x} = (A_0 + A_1 x)e^{0x} \quad \Rightarrow y_p = A_0 + A_1 x$$

Par dérivation et remplacement dans l'équation $y'' + 4y' + 3y = x$.

On trouve $A_0 = \frac{1}{3}$ et $A_1 = \frac{4}{9}$,

$$y_p = \frac{4_1}{9}x + \frac{1}{3}$$

A la fin la solution de l'équation non homogène est :

$$y = y_g + y_p$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{4_1}{9}x + \frac{1}{3}$$

c_1 et c_2 peuvent être trouver des conditions initiaux.

b. α, une solution simple pour l'équation caractéristique

si α est une solution pour l'équation caractéristique $\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$, correspondent à l'équation différentielle homogène (i.e $\alpha = \lambda_1$ ou $\alpha = \lambda_2$). $(\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$, et par suite, le premier membre de l'équation (21) est de l'ordre de $n-1$ alors que le seconde membre est de l'ordre n, La comparaison des deux membres est impossible. Dans ce cas, il faut chercher une solution particulière de la forme $y_p = xQ_n(x)e^{\alpha x}$

Exemple :

c. α, une solution double pour l'équation caractéristique

si α est une solution pour l'équation caractéristique $2\lambda + b = 0$ et $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. donc, le premier membre de l'équation (21) est de l'ordre de $n-2$ alors que le seconde membre est de l'ordre n, La comparaison des deux membres est impossible. Dans ce cas, il faut chercher une solution particulière de la forme $y_p = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$.

Exemple :

2ème cas $f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

Du même analyse que dans les paragraphes précédents, on trouve deux cas:

a. $\alpha + i\beta$ **n'est pas une solution de l'équation caractéristique corresponde à l'équation homogène.**

On cherche la solution particulière sous la forme,

$$y_p = u(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{A2.22}$$

$u(x)$ *et* $v(x)$ sont des polynôme de l'ordre du polynôme le plus élevé de $P(x)$ *ou* $Q(x)$.

b. $\alpha + \beta i$ **est une solution de l'équation caractéristique corresponde à l'équation homogène.**

On cherche la solution particulière sous la forme,

$$y_p = x\left(u(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right) \tag{A2.23}$$

Exemple :

$$y'' + 4y = \cos 2x$$

La solution de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière $y = y_g + y_p$

- $y_g = ?$

$y'' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_{1.2} = \mp 2i$$

Donc

$$x_g = A_1 \cos(2x) + A_2 \sin(2x)$$

- $y_p = ?$

Le deuxième membre est de la forme

$$\cos 2x = p_0(x)e^{0.x}\cos(2x) + Q_0(x)e^{0.x}\sin(2x)$$

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ Q_0(x) = 0 \\ \alpha = 0, \quad \beta = 2 \end{cases}$$

$$\alpha + 2i = \lambda_2$$

Donc, la solution particulière sera de la forme,

$$y_p = x(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))$$

Par dérivation et remplacement dans l'équation différentielle on trouve

$$C_1 = \frac{1}{4} \qquad et \qquad C_2 = 0$$

La solution particulière :

$$y_p = \frac{1}{4} x_1 \cos(2x)$$

A la fin, la solution est donnée par :

$$y = A_1\cos(2x) + A_2\sin(2x) + \frac{1}{4}x\cos(2x)$$

On peut trouver A_1 et A_2à partir des conditions initiales.

Bibliographies

1) نظرية الاهتزازات و الأمواج الميكانيكية’هشام جبر ’ ; ديوان المطبوعات الجامعية.
2) Mechanical vibrations. ‘Singiresu. S. Rao ; Pearson éducation.
3) Mechanical vibrations theory and applications. ‘S. Graham. Kelly’ ;cengage learning.
4) Vibrations et Ondes Mécaniques cours et exercices, ‘H. Djelouah’ ; Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.
5) The physics of vibrations and waves.H. J. Pain’ ;John Wiley & Sons.
6) Ingeneering Vibrations, ‘Daniel J Inman ’ ; Pearson éducation.
7) Cours de physique : Ondes Volume 3. ’Frank-S Crawford’ ;Dunod.
8) Vibration et phénomène de propagation. ‘Gabillard’. Dunod.
9) astrowww.phys.uvic.ca/~tatum/classmechs/class11.pdf
10) https://www.youtube.com/watch?v=sP1DzhT8Vzo
11) https://www.youtube.com/watch?v=DZcflDmog60
12) https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw