

**Cours de la programmation linéaire**  
**Pour les étudiants de la première année master mathématiques appliquées et**  
**mathématiques fondamentales**  
**Département de mathématiques et informatiques**  
**Université abdelhafid BOUSSOUF MILA**  
**Anné universitaire 2023/2024**

**Chapitre 4**

# Table des matières

<b>introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 La méthode du simplexe</b>	<b>3</b>
1.1 La méthode du simplexe . . . . .	3
1.1.1 Démarches de la méthode du simplexe . . . . .	4
1.1.2 Résumé de l'algorithme du simplexe . . . . .	6
1.2 Recherche d'une solution réalisable de base initiale, méthode des deux phases et big M . . . . .	7
1.2.1 Méthode Big M . . . . .	9
1.3 Méthode des deux phases . . . . .	11
1.4 Cas particuliers . . . . .	13
1.4.1 Cas de solution non réalisable . . . . .	13
1.4.2 Cas de solution sans borne . . . . .	14
1.4.3 Cas de solution multiple . . . . .	14

# 1

## La méthode du simplexe

### 1.1 La méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une technique algébrique qui permet de trouver la solution optimale d'un programme linéaire d'une façon ordonnée et concise. C'est une méthode itérative qui se base sur le fait de partir d'une solution de base réalisable (solution de départ) et d'augmenter (si on maximise) ou de diminuer (si on minimise) la valeur de la fonction objectif. Comme il a été déjà présenté dans le chapitre 1, un programme linéaire général peut être formulé comme suit :

$$OptF = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

## 1.1 La méthode du simplexe

---

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} \ x_1 + a_{1,2} \ x_2 + \dots + a_{1,n} \ x_n \ R_1 \ b_1 \\ a_{2,1} \ x_1 + a_{2,2} \ x_2 + \dots + a_{2,n} \ x_n \ R_2 \ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m,1} \ x_1 + a_{m,2} \ x_2 + \dots + a_{m,n} \ x_n \ R_m \ b_m \\ x_1, \ x_2, \dots \ x_n \in E, \end{array} \right.$$

### 1.1.1 Démarches de la méthode du simplexe

Revenons à l'exemple ?? et essayons d'énoncer les étapes de l'algorithme du simplexe. Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{Max} Z = 6x_1 + 5x_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

#### Etape 1 : solution de départ

Écrire le programme sous la forme standard, choisir un ensemble initial de variables de base (une solution de départ réalisable), exprimer la fonction objectif en fonction des variables hors-base et écrire le système sous forme d'un tableau. Sous la forme standard l'exemple s'écrit :

$$\text{Max} Z = 6x_1 + 5x_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + e_1 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + e_2 = 6 \\ x_1 - x_2 + e_3 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Une solution réalisable de base est obtenue en annulant les variables hors base et en résolvant le système ainsi déterminé pour avoir la valeur des variables de base. La base est une  $m \times n$  matrice inversible fabriquée en extrayant  $m$  colonnes linéairement indépendantes de la matrice  $A$ . En choisissant  $e_1, e_2, e_3$  comme variables de base initiales, on obtient une solution réalisable de base de départ immédiatement, soit :  $e_1 = 8, e_2 = 6, e_3 = 2$ .

On peut dresser le tableau suivant :

base	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	b
$e_1$	1	1	1	0	0	8
$e_2$	-2	3	0	1	0	6
$e_3$	1	-1	0	0	1	2
Z	-6	-5	0	0	0	

## 1.1 La méthode du simplexe

---

La dernière rangée contient la fonction objectif exprimée de la façon suivante :  $Z - (6x_1 + 5x_2)$ . On doit toujours écrire le problème de sorte que le coté droit du tableau soit non négatif. Autrement, la solution de base obtenue n'est pas réalisable.

### Etape 2 : choix de la variable rentrante

S'il y a des variables hors-base avec un coefficient négatif dans la dernière rangée, choisir celle qui a le plus petit coefficient comme nouvelle variable de base. On l'appelle variable rentrante.

Si toutes les variables hors-base ont un coefficient positif ou nul dans la dernière rangée, on a une solution optimale. Les nouveaux coefficients obtenus à chaque itération dans la dernière rangée correspondant à la fonction objectif sont appelés coûts réduits. On les note par  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Cette étape consiste donc à trouver :  $c_r = \min_j (c_j | c_j < 0)$  et à choisir la nouvelle variable de base ( $c_r$ ) (variable rentrante, qui a le meilleur potentiel de gain, puisque le plus petit coefficient est celui qui minimise la fonction objectif le plus rapidement).

### Etape 3 : recherche de limitation

Déterminer la valeur maximale que peut prendre la variable rentrante dans la base et qui vérifie toutes les contraintes. Pour cela calculer une limitation pour cette variable rentrante. Ceci correspond au rapport entre le coté droit et les coefficients positifs de la variable rentrante. Soit le tableau suivant :

base	.	$x_r$	.	$x_k$	.	b
.	.	$a_{1r}$	.	0	.	$b_1$
$x_k$	.	$a_{ir}$	.	1	.	$b_i$
.	.	$a_{mr}$	.	1	.	$b_m$
Z	.	$c_r$	.	.	.	$c_p$

En faisant entrer ( $x_r$ ) dans la base, on obtient :  $x_k = b_i - a_{ir} \times x_r$ . Où k est l'indice de la variable de base dans la rangée i. par conséquent si on fait sortir une variable de la base, disons ( $x_k$ ), elle devient nulle et on a :  $0 = b_i - a_{ir} \times x_r$ . Pour obtenir une solution réalisable au prochain tableau, il faut sortir de la base variable qui donne la plus petite valeur de  $x_r$ , c'est-à-dire la première variable qui prend une valeur non réalisable lorsqu'on augmente ( $x_r$ ). Cette étape consiste donc à chercher :  $x_r = \min_{i=1, \dots, m} (\frac{b_i}{a_{ir}} | a_{ir} > 0) = \frac{b_s}{a_{sr}}$  Où s est l'indice de la rangée avec le plus petit rapport. La variable de base dans la rangée s du tableau est appelée variable sortante de la base. Le coefficient, à l'intersection de la colonne de la variable rentrante et la ligne de la variable sortante s'appelle pivot. Appliquons ceci à notre exemple :

base	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	b	limitation
$e_1$	1	1	1	0	0	8	8
$e_2$	-2	3	0	1	0	6	
$e_3$	1	-1	0	0	1	2	2
Z	-6	-5	0	0	0	0	
	↑						

## 1.1 La méthode du simplexe

---

Ce tableau indique que  $x_1$  doit rentrer dans la base et que  $e_3$  doit sortir de la base.

### Étape 4 : Transformation du tableau

Changer de base, résoudre pour trouver la valeur des nouvelles variables de base et exprimer la fonction objectif en termes des variables hors-base. Retourner à la deuxième étape.

Ceci consiste à transformer le tableau de la façon suivante :

- Diviser la rangée de la variable sortante par le pivot.
- Calculer les autres coefficients, en utilisant la méthode du rectangle, par la formule suivante :  $a_{lk}' = a_{lk} - a_{sk} \times \frac{a_{lr}}{a_{sr}}$

On doit former un rectangle ayant le pivot comme sommet, et l'élément à modifier comme sommet opposé.

On peut alléger les calculs en sachant que :

- Tous les coefficients de la colonne de la variable entrante deviennent nulles à part le pivot devient égal à 1.
- Les colonnes des variables de base correspondent aux colonnes de la matrice unité.

Après transformation, le tableau devient :

base	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	b	limitation
$e_1$	0	2	1	0	-1	6	3
$e_2$	0	1	0	1	2	10	10
$x_1$	1	-1	0	0	1	2	
Z	0	-11	0	0	6	12	
		↑					

Continuons la résolution de même, on obtient le tableau suivant :

base	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	b	limitation
$x_2$	0	1	0.5	0	-0.5	3	
$e_2$	0	0	-0.5	1	2.5	7	
$x_1$	1	0	0.5	0	0.5	5	
Z	0	0	5.5	0	0.5	45	

Tous les coûts réduits sont positifs ou nuls, on termine. La solution optimale obtenue est :  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 3$ ,  $Z = 45$ .

### 1.1.2 Résumé de l'algorithme du simplexe

1. Ecrire le programme sous la forme standard, choisir un ensemble initial de variables de base (une solution de départ réalisable), annuler les variables hors-base, exprimer

## 1.2 Recherche d'une solution réalisable de base initiale, méthode des deux phases et big M

---

la fonction objectif en fonction des variables hors-base et écrire le système sous forme d'un tableau.

2. Trouver  $c_r = \min_j (c_j | c_j < 0)$  et choisir la nouvelle variable de base,  $x_r$  (variable entrante), qui a le meilleur potentiel de gain, puisque le plus petit coefficient est celui qui minimise la fonction objectif le plus rapidement.
3. Calculer la limitation de  $x_r : x_r = \min_{i=1, \dots, m} (\frac{b_i}{a_{ir}} | a_{ir} > 0) = \frac{b_s}{a_{sr}}$ . Déduire la variable sortante de la base (variable dans la rangée  $s$ ) et déterminer le pivot (élément à l'intersection de la colonne de la variable entrante et la ligne de la variable sortante).
4. Transformer le tableau de la façon suivante :
  - Diviser la rangée de la variable sortante par le pivot.
  - Calculer les autres coefficients, en utilisant la méthode du rectangle, par la formule suivante :  $a'_{lk} = a_{lk} - a_{sk} \times \frac{a_{lr}}{a_{sr}}$

Tous les coefficients de la colonne de la variable entrante deviennent nulles à part le pivot devient égal à 1. Les colonnes des variables de base correspondent aux colonnes de la matrice unité.

**Exemple 1.1** Reprenons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max} Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 40 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 \leq 40 \\ 0.8x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Résoudre le programme linéaire par la méthode du simplexe.

## 1.2 Recherche d'une solution réalisable de base initiale, méthode des deux phases et big M

Dans l'exemple précédent, toutes les contraintes sont de type  $\leq$ , ceci simplifie le problème puisqu'en l'écrivant sous la forme standard, on obtient une solution réalisable de base de départ. Toutefois, si le problème contient des contraintes de type  $\geq$  ou de type  $=$ , on n'obtient pas une solution réalisable de départ en écrivant le système sous forme standard.

Soit à résoudre le programme linéaire général suivant :

## 1.2 Recherche d'une solution réalisable de base initiale, méthode des deux phases et big M

---

$$OptF = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n \leq b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n \geq b_2 \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \end{cases}$$

La forme standard est :

$$MaxF = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n - x_{n+2} = b_2 \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n + 0 = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \end{cases}$$

Pour résoudre le problème par la méthode du simplexe, il faut chercher une solution réalisable de base de départ. Soient  $x_{n+1}$  et  $x_{n+2}$  les variables de base choisies. En annulant les variables hors-base, le système devient :

$$\begin{cases} x_{n+1} = b_1 \\ -x_{n+2} = b_2 \\ 0 = b_3 \end{cases}$$

Cette solution de départ ne convient, elle n'est pas réalisable. Pour déterminer une solution de départ réalisable on utilise des variables artificielles ( $y_i$ ) dans les relations de type  $\geq$  et les relations de type  $=$ .

Le système devient :

$$MaxF = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n - x_{n+2} + y_1 = b_2 \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n + 0 + y_2 = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2 \geq 0, \end{cases}$$

## 1.2 Recherche d'une solution réalisable de base initiale, méthode des deux phases et big M

---

Pour résoudre le problème par la méthode du simplexe, il faut chercher une solution réalisable de base de départ. Soient  $x_{n+1}$  et  $y_1, y_2$  les variables de base choisies. En annulant les variables hors-base, le système devient :

$$\begin{cases} x_{n+1} = b_1 \\ y_1 = b_2 \\ y_2 = b_3 \end{cases}$$

### 1.2.1 Méthode Big M

Toutefois, pour que la solution obtenue soit valide, tous les  $y_i$  doivent être égal à zéro dans le tableau final (doivent être hors base). Pour s'assurer que ces variables artificielles ne seront pas dans la solution optimale, on leur associe un coût fictif ( $M$ ) arbitrairement grand ( $M = +\infty$ ) lorsqu'il s'agit d'un problème de minimisation ou un profit fictif arbitrairement petit ( $-M = -\infty$ ) lorsqu'il s'agit d'un problème de maximisation.

L'expression de la fonction économique est donc :

$$MaxF = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - My_1 - My_2$$

#### Exemple 1.2

$$\begin{aligned} MaxZ &= 3x_1 + 2x_2 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On commence par mettre le programme linéaire sous la forme standard :

$$\begin{aligned} MaxZ &= 3x_1 + 2x_2 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - x_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

En introduisant les variables artificielles le système devient :

$$\begin{aligned} MaxZ &= 3x_1 + 2x_2 - My_1 - My_2 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 10 \\ x_1 - x_3 + y_2 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

## 1.2 Recherche d'une solution réalisable de base initiale, méthode des deux phases et big M

---

La solution de base de départ est :

$$\begin{cases} y_1 = 10 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

On aura le tableau initial :

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	b	
$y_1$	1	1	0	1	0	10	$\times(M)$
$y_2$	1	0	-1	0	1	4	$\times(M)$
Z	-3	-2	0	0	0	0	
	0	0	0	M	M	0	$(-)(-)$

Dans ce tableau on sépare les coefficients de la fonction objectif en deux lignes, la deuxième ligne comporte les coefficients des variables artificielles. Les deux dernières lignes du tableau se lisent :

$$Z - (3+0)x_1 - (3+0)x_2 - (0+M)y_1 - (0+M)y_2 = 0.$$

Cette expression n'est pas en fonction des variables hors-base seulement et, par conséquent il faut la transformer pour que les coefficients de  $y_1$  et  $y_2$  soient nuls. Ceci permet d'éviter que l'une des variables artificielle soit une variable rentrante dans la base. Le tableau devient :

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	b	Limitation	
$y_1$	1	1	0	1	0	10	10	
$y_2$	1	0	-1	0	1	4	4	$\longrightarrow$
Z	-3	-2	0	0	0	0		
	-2M	-M	M	0	0	-14M		

On peut commencer la résolution. La première itération donne :

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	b	Limitation	
$y_1$	0	1	1	1		6	6	
$x_1$	1	0	-1	0		4	pas de limitation	$\longrightarrow$
Z	0	-2	-3	0		12		
	0	-M	-M	0		-6M		

Une fois qu'une variable artificielle est sortie de la base, on peut négliger la colonne correspondante dans le tableau.

La deuxième itération donne :

### 1.3 Méthode des deux phases

---

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	b	
$x_2$	0	1	1			6	
$x_1$	1	0	-1			4	
Z	0	0	-1			24	
	0	0	0			0	

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	b	
$x_3$	0	1	1			6	
$x_1$	1	1	0			10	
Z	0	1	0			30	

On atteint la solution optimale lorsque tous les coûts réduits sont non négatifs, c'est-à-dire que tous les coefficients de la première ligne de (-Z) sont non négatifs et que tous les coefficients de sa deuxième ligne sont nuls.

Dans ce cas, la solution optimale obtenue est :

$$x_1 = 10, x_2 = 0, Z^* = 30.$$

**Exercice 1.1** Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode Big M :

$$\text{Max}Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq \frac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq \frac{7}{3} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

### 1.3 Méthode des deux phases

- Phase 1 – Résolution du problème auxiliaire – Si les variables artificielles se sont annulées Alors on a une base de départ pour le problème initial, aller en phase 2  
Sinon le problème initial n'a pas de solution réalisable (domaine vide) STOP
- Phase 2 – Résoudre le problème initial en partant de la base trouvée en phase 1

**Phase 1 : tableau initial** Le problème auxiliaire :

$$\text{Min}Z' = y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 10 \\ x_1 - x_3 + y_2 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

### 1.3 Méthode des deux phases

---

Il faut exprimer  $MinZ' = y_1 + y_2$  en fonction des variables hors-base On remplace  $y_1$  et  $y_2$  par leur expression en fonction des variables  $x_1, x_2$  donnée dans les deux premières lignes, le programme linéaire auxiliaire sera :

$$MinZ' = 14 - 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 10 \\ x_1 - x_3 + y_2 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$MaxZ' = -14 + 2x_1 + x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 10 \\ x_1 - x_3 + y_2 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	b	
$y_1$	1	1	0	1	0	10	
$y_2$	1	0	-1	0	1	4	
Z	-2	-1	1	0	0	-14	

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	b	
$y_1$	0	1	1	1	-1	6	
$x_1$	1	0	-1	0	1	4	
Z	0	-1	-1	0	2	-6	

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	b	
$x_2$	0	1	1	1	-1	6	
$y_2$	1	0	-1	0	1	4	
Z	0	0	0	1	1	0	

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	b	
$x_2$	0	1	1	6	
$x_1$	1	0	-1	4	
Z	0	0	-1	24	

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	b	
$x_3$	0	1	1	6	
$x_1$	1	1	0	10	
Z	0	1	0	30	

La solution optimale est  $Z = 30$   $X_1 = 10$   $X_2 = 0$

## 1.4 Cas particuliers

Les sections précédentes illustrent le déroulement des méthodes de résolution pour un programme idéal. Toutefois, en pratique, plusieurs difficultés supplémentaires peuvent être rencontrées.

### 1.4.1 Cas de solution non réalisable

Lorsque la méthode du simplexe est utilisée, si une des variables artificielles se trouve parmi les variables de base dans le tableau final, on conclut que le modèle n'a pas de solution réalisable.

#### Exemple 1.3

$$\begin{aligned} \text{Max} Z &= x_1 + x_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$	$b$	
$y$	1	1	-1	0	1	3	
$x_4$	3	3	0	1	0	6	
$Z$	-1	-1	1	0	0	-3	

base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$	$b$	
$y$	0	0	-1	$-\frac{1}{3}$	1	1	
$x_1$	1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	2	
$Z$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	-1	

*Il n'y a pas de solution possible au problème.*

### 1.4.2 Cas de solution sans borne

Si à la troisième étape d'une itération quelconque de la méthode du simplexe, il n'y a pas de coefficients positifs dans la colonne de la variable qui doit rentrer dans la base, cela implique que la solution obtenue est sans borne.

### 1.4.3 Cas de solution multiple

Si un des coûts réduits associés aux variables hors-base a une valeur nulle. Ceci implique que même si on introduit la variable hors-base dans la base,  $Z$  ne change pas et par conséquent la solution de base correspondante est aussi une solution optimale.

