رابعا: التوزيع الأسي

تمهيد:

غالبا ما يستخدم هذا التوزيع في المسائل العملية الخاصة بالزمن الذي يجب انتظاره حتى وقوع حدث معين، كالزمن الذي يعمله جهاز إلكتروني قبل أن يحدث به عطب، الفترة الزمنية التي ينتظرها زبون في بنك قبل أن تؤدي إليه الخدمة.

فإذا كان وقوع الحوادث يحدث وفقا لنظام بواسون فإن زمن الانتظار لوقوع حدث معين أو الفترة الزمنية ما بين حدثين متتاليين تتبع التوزيع الأسي، وهذه الحقيقة مفيدة جدا في استخدام التوزيع الأسي في كثير من المسائل العملية.

1. دالة كثافة الاحتمال:

إذا كان X متغير عشوائي بحيث: $X \backsim exp(\lambda)$ فإن دالة الكثافة تعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

يمكن الملاحظة أن هذه الدالة تحقق شروط دالة كثافة احتمالية لأن:

$$\forall x \in \Re: f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} f(x) dx$$

$$= \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= - e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty} = 1$$

2. دالة التوزيع F(x):

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx$$

$$x < 0: F(x) = 0$$

$$x \geq 0: F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= -e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

3. المميزات العددية:

ليكن المتغير العشوائي $X \backsim exp(\lambda)$

1.3. الدالة المولدة للعزوم:

$$m_x(t) = E(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f(x)dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{tx}\, e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{x(t-\lambda)}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} e^{-(\lambda - t)x}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$m_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

2.3. التوقع الرياضي:

$$E(X) = m'_x(0)$$

$$m'_x(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\Big| t = 0$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

3.3. التباين:

$$E(X)^2 = m''_x\,(0)$$

$$m''_x\,(t) = \frac{2\lambda(\lambda - t)}{(\lambda - t)^4}$$

$$E(X^2) = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\right| t = 0$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

مثال:

إذا كان الزمن الذي تستغرقه مكالمة هاتفية بالدقائق في أحد الادارات يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 5 دقائق.

فإذا تم اختيار أحد المكالمات بطريقة عشوائية، ما هو احتمال أن تستغرق هذه المكالمة.

- أكثر من دقيقتين.
- أقل من دقيقتين.
- من 5 إلى 10 دقائق.