ثالثا: التوزيع المنتظم المستمر

يعد التوزيع المنتظم من التوزيعات الاحتمالية المتصلة المهمة جدا لكثير من التطبيقات في الواقع العملي، إذ يستخدم لحساب الاحتمالات المناسبة لهذه التطبيقات، كدراسة احتمال وصول البواخر إلى الموانئ لتفريغ حمولتها وأوقات مغادرتها ووصول الشاحنات إلى محطات التفريغ.

1. دالة الكثافة الاحتمالية:

نقول عن المتغير العشوائي المستمر X أنه يخضع لقانون التوزيع المنتظم $\mathrm{U}(a;b)$ إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالي $\mathrm{f(x)}$ معرفة كما يلي:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

ويمكن التحقق من أن f هي دالة كثافة احتمالية كما يتضح من خلال ما يلي:

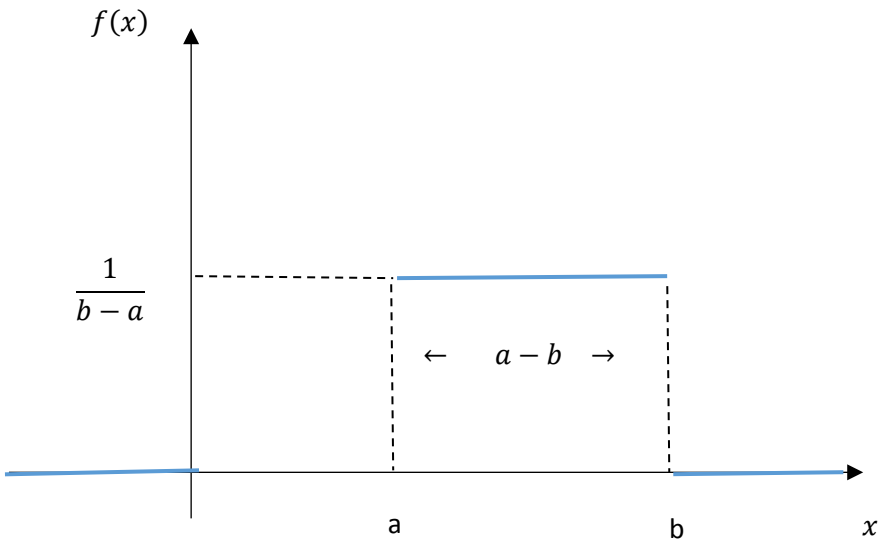
- الشرط الأول دوما محقق بالتعريف ($\mathrm{a} < \mathrm{b}$ ومنه $\frac{1}{b-a} > 0$).
- الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} dx$$

$$= \frac{b-a}{b-a} = 1$$

أما التمثيل البياني لقانون التوزيع الاحتمالي المستمر فيكون على شكل رباعي (يكون الاتجاه العام مستطيل)، كما يبرز ذلك الشكل الآتي:



2. تابع التوزيع المنتظم وتمثيله البياني:

يعرف تابع التوزيع F(x) للمتغير العشوائي x الذي يخضع لقانون التوزيع المنتظم كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

ويمكن أيجاده كما يلي:

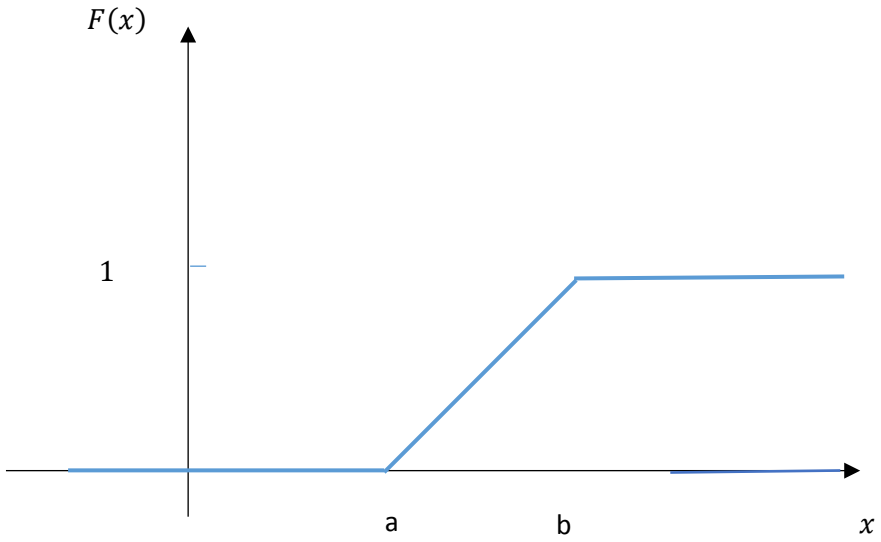
$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{p}(\mathrm{x} \leq x)$$

$x \leq a$:
$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \, dx = 0$$

$a \leq x < b$:
$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{a} 0 \, dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} \, dx$$
$$= \frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

$x > b$:
$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{a} 0 \, dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} \, dx + \int_{b}^{x} 0 \, dx$$
$$= \frac{b-a}{b-a} = 1$$

أما التمثيل البياني لدالة التوزيع F(x) فتكون وفق ما يلي:



3. المميزات العددية:

يمكن توضيح المميزات العددية لهذا التوزيع من خلال ما يلي:

1.3. التوقع الرياضي:

$$\mathrm{E(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} \left(\frac{1}{b-a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\mathrm{b-a}} \int_{a}^{b} x\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_{a}^{b}$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

$$\mathrm{E}(x) = \frac{b+a}{2}$$

2.3. التباين:

$$\mathrm{V(x)} = \mathrm{E(x^2)} = [\mathrm{E(x)}]^2$$

$$\mathrm{E(x^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \ f(x)d(x)$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{6} x^2 \ dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\ \frac{x^3}{3}\Big|_a^b$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\frac{b^3-a^3}{3}$$

$$= \frac{(b+a)^2}{3}$$

$$V(x) = \frac{(b+a)^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.3. الدالة المولدة للعزوم:

$$m_x\,(t) = E(e^{xt})$$

$$= \int_a^b e^{xt} \ f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{xt}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{t}\ e^{xt}\right)\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{bt}}{t} - \frac{e^{at}}{t}\right)$$

$$m_x\,(t) = \frac{e^{bt} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

مثال:

ليكن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع المنتظم المستمر:

$$x \rightsquigarrow U(0{,}10)$$

أحسب الاحتمالات التالية:

$$p(3 < x < 8)$$

$$p(x < 3)$$

$$p(x > 6)$$