Chapitre 1 : Rappel mathématiques

Elément de calcul vectoriel

1 Introduction

La mécanique rationnelle ou la mécanique ***newtonienne*** est une branche de la physique qui étudie les comportements des ***corps solide*** à l'état de repos ou mouvement soumis à des forces extérieur. Si le corps en état de repos s'appelé la statique par contre si le corps en état de mouvement s'appelé dynamique.

2 Vecteurs

En physique les quantités sont divises en deux. Une quantité exprime seulement par une grandeur (nombre) s'appelée un scalaire d'une autre manière cette quantité ne change pas avec les cordonnée de position **(*système de coordonnées cartésiennes*)** comme exemple la masse (7 *gramme*), la température (20 *K*), le temps (5 *min*), l'autre quantité s'appelé un vecteur cette quantité subit un changement avec les cordonnée de position.

Le vecteur ($\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$) ***voir Figure 1.1*** est une quantité physique exprime par ces éléments : son origine (***O***), son module, son direction et son sens. Comme exemple la force, la vitesse, le déplacement et l'accélération.

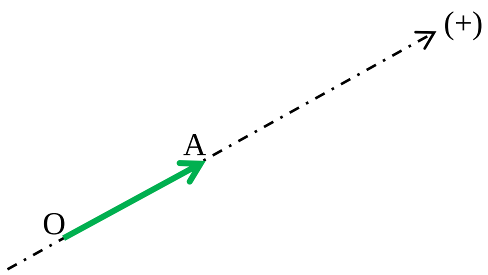

Figure 1.1 Un vecteur.

- ***Le module*** du vecteur est la longueur ou la taille de vecteur, est toujours positif et exprime par le théorème de **Pythagore** comme suite,

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\right| = \sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2 + w^2}}$$

- ***La direction*** désigne la direction de la droite qui "porte" ce vecteur.
- ***Le sens*** permet de définir un sens de parcours sur cette droite parmi les deux possibles.

- Le vecteur présent graphiquement par une flèche caractérise par deux points ; ***origine O*** et ***l'extrémité A***.

3 Classification des vecteurs

Il existe plusieurs types de vecteurs sont:

- ***Un vecteur libre*** est défini par son direction, son sens et son module. Le point d'application (origine) pouvant être quelconque dans l'espace. Par exemple le vecteur d'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.
- ***Un vecteur glissant*** est défini par sa droite d'action (support), son sens et son module, son point d'application pouvant être quelconque sur la droite d'action. Par exemple une force appliquée à un solide indéformable peut glisser sur sa droite d'action son modifier l'effet qu'elle produit.
- ***Un vecteur lié*** est défini par sa droite d'action, son sens, son module et son point d'application. Par exemple le poids d'un corps $\vec{P}$ est un vecteur qui a un point d'application au centre de gravité du corps.

4 Opérations sur les vecteurs

4.1 Produit d'un vecteur par un scalaire

Le produit de vecteur ($\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$) par un nombre réel (scalaire) k, est un nouveau vecteur ($k\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$) dont la direction parallèle de vecteur ($\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$). Avec $\|k\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\| = k\|\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\|$.

Le vecteur ($k\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$) a la même direction de ($\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$) si $k > 0$ et la direction contraire si $k < 0$. Voir Figure 1.2

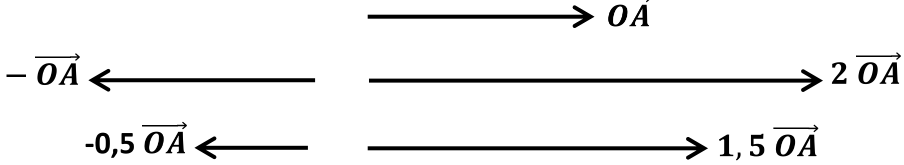

Figure 1.2 Exemple des produits d'un vecteur par un scalaire.

4.2 Somme de deux vecteurs

4.2.1 Méthode algébrique

Pour additionne deux vecteurs d'une façon algébrique on additionne les composantes des vecteurs, on obtient les composante de vecteur résultant :

Soit $\overrightarrow{AB} = (a, b)$ et $\overrightarrow{CD} = (c, d)$

Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Exemple

Soit $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$ et $\overrightarrow{CD} = (4, -1)$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (3, 2) + (4, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (3 + 4, 2 - 1)$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (7, 1)$$

La composante (x, y) de la résultante est $(7, 1)$.

4.2.2 Méthodes géométriques

Il existe deux façons de construire géométriquement la résultante de deux vecteurs:

4.2.2.1 Méthodes triangulaire

- On prend l'extrémité d'un vecteur et on la place à l'origine du deuxième vecteur.
- On ressemble l'origine de première vecteur a l'extrémité d seconde vecteur.
- Le vecteur obtenu et la résultante de deux vecteurs voir figure 1.3.

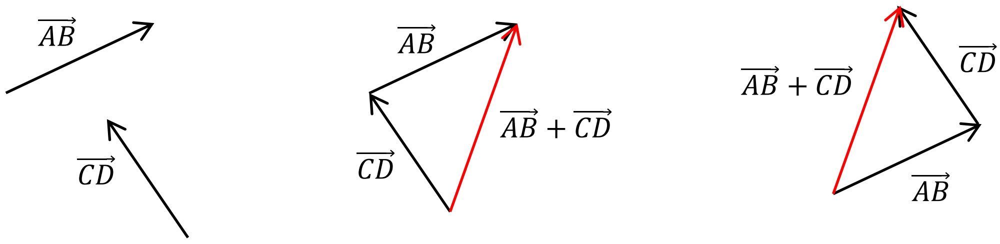

Figure 1.3 Méthodes du triangulaire.

4.2.2.2 Méthode du parallélogramme

- On met les origines de deux vecteurs ensemble.
- On complète le parallélogramme.
- On obtient le vecteurs somme suite à l’assemblage de deux origines avec la sommet du parallélogramme voir figure 1.4.

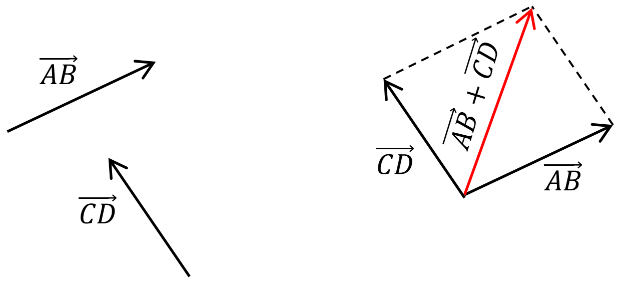

Figure 1.4 Méthodes du parallélogramme.

4.3 Produit scalaire

4.3.1 Le produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs V1 et V2 et un scalaire peut définie comme suite :

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

4.3.2 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs V_1 et V_2 est un vecteur W tel que :

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{V_1}\Lambda\overrightarrow{V_2} = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\|\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|\sin\left(\overrightarrow{V_1}\Lambda\overrightarrow{V_2}\right)\overrightarrow{n}$$

On peut défini le produit vectoriel entre deux vecteur par la formula suivante :

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{V_1}\Lambda\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ -z_1x_2 + z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{matrix}$$