Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf. Mila 2023-2024
Institut de Mathématiques et Informatique
Departement de Mathématiques
L3-S5: Espaces vectoriels normés

Serie d'exercices n°2 : **Espaces de Hilbert**

Exercice1(Identité de polarisation) Soit H un espace préhilbertien. Prouver que pour tous vecteurs x,y on a :

$$\langle x/y\rangle = 1/4(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

dans le cas réel, et

$$\langle x/y\rangle = 1/4(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

dans le cas complexe.

Exercice 2 Soit $\mathcal{C}[0,1]$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs complexes. On introduit la norme $\|.\|$ sur $\mathcal{C}[0,1]$ par :

$$\|\xi\| = max_{t\in[0,1]}|\xi(t)|.$$

Montrer qu'il est impossible de définir un produit scalaire sur $\mathsf{C}[0,1]$, tel que la norme induite soit la norme donnée.

Exercice 3 On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathcal{M}_{(m,n)}(R)$ de matrices à m lignes et à n colonnes, à coefficients réels.
Pour $a \in E, b \in E$, on pose $\langle a/b\rangle = tr(a^T.b)$.
Démontrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Exercice 4 Soit Hun espace préhilbertien. Décrire toutes les paires de vecteurs x, y tels que

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$

Exercice5 Soit $[a,b]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.
Montrer que $L^2([a,b]) \subset L^1([a,b])$.

Exercice 6 Soit $H = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ (espace de Hilbert réel). On note
$C = \{x = (x_n) \in H; \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}$.
Démontrer que C est convexe fermé.
Déterminer la projection sur ce convexe C.
Reprendre la question précédente avec $H = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$

Exercice 7 Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note M_N le sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ formé des suites $(x_n)_{(n\in N)}$ telles que $\sum_{n=0}^N x_n = 0$.
1- Montrer que l'application $(x_n)_n \mapsto \sum_{k=0}^N x_k$ est linéaire continue de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Que peut-on en déduire sur M_N ? Conclure que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) = M_N \oplus M_N^{\perp}$.
2- Soit $E = \{(y_n)_n$ telles que, pour $0 \leq i \leq j \leq N$, on ait $y_i = y_j$ et $y_n = 0$ pour $n > N\}$
Montrer que l'orthogonal $M_N^{\perp}$ de M_N contient E.
Montrer que $M_N^{\perp} = E$ (remarquer que, pour $0 \leq i \leq j \leq N$, la suite (x_n)telle que $x_i = 1, x_j = -1$ et $x_n = 0$ si $n \neq i$ et $n \neq j$ appartient à M_N.

Exercice 8 Soit E l'espace préhilbertien des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = 0$
Muni du produit scalaire $\langle u/v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\overline{v_n}$.

1- Montrer que l'application $\varphi(u) : E \mapsto C$ définie par $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ est une forme linéaire continue sur E.

Existe-t-il un élément $a \in E$ tel que pour tout u de E, on ait $\varphi(u) = \langle u/a\rangle$?

Que peut-on en déduire sur E ?

Exercice9 Soit $(\omega_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite de nombres complexes. On définit sur ℓ_2, un opérateur D_ω par $D_\omega x = (\omega_1 x_1, \omega_2 x_2, ...) \in \ell_2$. Prouver que D_ω est borné si et seulement si $(\omega_j x_j)_{j=1}^{\infty}$ est bornée et dans ce cas $\|D_\omega\| = \sup\limits_j |\omega_j|$.

Supposons que, $\sup\limits_j |\omega_j| < \infty$. Prouver que D_ω est inversible si et seulement si $\inf\limits_j |\omega_j| > 0$. Donner une expression de D_ω^{-1}.

Exercice10

1. Soit H un espace de Hilbert, et soit B la boule unité fermée de H.
   (a) Montrer que $\forall x \in H \setminus B, \forall z \in B$, on a $\left(\mathrm{Re}\left\langle z, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle - 1\right) \leq 0$.
   (b) Deduire le signe de Re $\left\langle z - \frac{x}{\|x\|}, x - \frac{x}{\|x\|}\right\rangle$.
   (c) Déduire une expression de la projection sur B, la boule unité fermée de H. Justifier.

Exercice11 Soit P une application linéaire continue d'un espace de Hilbert E dans lui-même. Démontrer que si P est un projecteur orthogonal alors:
1- $P^2 = P$ et $\|P\| \leq 1$.
2- $\mathrm{Im}(P)$ est fermé.
3- $\forall x, y \in E$, $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle$