Chapitre VI

Les Series Numériques :

1.4. Definitons :

Def 1 : Soit $(U_n)_n$ une suite de nombres réels.

On note : $S_n = U_0 + U_2 + \cdots + U_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

S_n est dite la somme partielle d'ordre "n"

Def 2 : Soit $(U_n)_n$ une suite de nombre réels on appelle serie numerique de terme général "U_n" la somme : $\sum_{n=0}^{\infty} U_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n + U_{n+1} + \cdots$

$$= \lim_{n \to +\infty} S_n = S.$$

Notations : 1) $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$, $\sum U_n$ ou $\sum_{n\geq 0} U_n$ désignent les 3 la même serie numérique.

2) $(S_n)_n$ est dite la suite des sommes partielles d'ordre "n"

3) U_n : est le terme général de la serie $\sum U_n$

4) S : est la somme $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$

2.4 La Nature des series :

Ici on parle de convergence et divergence des series numériques.

* La serie $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ est dite convergente si $(S_n)_n$ est convergente ie:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S \text{ Unique et fini.}$$

2.4.1 La Serie géométrique :

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}^*$ une serie géométrique

On va etudier sa nature suivant les valeurs de q :

1) si $q=1$ alors : $S_n = 1+1+\dots+1 = n+1$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ alors la serie est divergente

d'autre part :

$$S_{n+1} = \underbrace{1+q+q^2+\dots+q^n}_{} + q^{n+1}$$

$$= S_n + q^{n+1} \quad \dots \text{(1)}$$

$$S_{n+1} = 1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1}$$

$$= 1+q\underbrace{(1+q+\dots+q^n)}_{}$$

$$= 1+q S_n \quad \dots \text{(2)}$$

de ① et ② on obtient :

$$1 + q S_n = S_n + q^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & si\ 0 \leq q < 1 \\ +\infty & si\ q > 1. \end{cases}$$

alors S_n géométrique est convergente si $q < 1$

s'est divergente si $q > 1$.

2.4.2 Critère de l'intégral

Considérons f une fonction continue, décroissante et positif sur $[1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$

posons : $U_n = f(n)$, $\forall n \geq 1$ donc :

$\sum_{n \geq 0} U_n$ et $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ ont la même nature

ie : si $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge alors $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge

sinon l'inverse est vrais.

2.4.3 La serie de Riemann

Elle est de la forme : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

on va etudier sa nature suivant.

le critère de l'intégral :

Posons : $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \in [1, +\infty[$

$f(x)$ continue sur $[1, +\infty[$, décroissante et positive de plus : $f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$ alors : $\sum_{n \geq 1} U_n$ et l'intégral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ ont la même nature :

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ est un intégral de Riemann

donc : $\sum_{n \geq 1} U_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$,

est $\begin{cases} \text{converge si } \alpha > 1 \\ \text{diverge si } \alpha \leq 1. \end{cases}$

2.4.4 Critère de comparaison :

Soient $\sum_{n \geq 0} U_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifes on suppose que : $0 \leq U_n \leq v_n$

donc :

1°) Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} U_n$ converge

2°) Si $\sum_{n \geq 0} U_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

2.4.5 Critère d'équivalance :

Soient $\sum_{n \geq 0} U_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes strictement positifes on dit que $U_n \sim v_n$ ssi $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{v_n} = 1$

donc $\sum_{n \geq 0} U_n$ et $\sum_{n \geq} v_n$ sont de la même nature.

2.4.6 Critère de Cauchy

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une serie à termes positifs :

et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$:

1) si $l < 1$ la serie est convergente
2) si $l > 1$ " " " divergente
3) si $l = 1$ c'est le cas douteux.

2.4.7 Critère de D'alembert :

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une serie à terme positifs et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$$

1) si $l < 1$ la serie est convergente.
2) si $l > 1$ " " " divergente.
3) si $l = 1$ c'est le cas douteux.

2.4.8 Critère de Leibiniz :

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ est dite altérnée si :

$$U_n = (-1)^n b_n \,,\ b_n \geq 0 \ \forall n \geq 0.$$

Critère de Leibiniz :

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une serie altérnée alors :

$$\text{si } \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \\ \text{et} \\ (b_n)_n \searrow \end{cases} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n \text{ est convergente}$$

Scanné avec CamScanner