Chapitre 5

Fonctions et polynômes

5.1 Fonctions

1)Évaluation

• La fonction 'feval' permet d'évaluer une fonction.

• **Exemple :**

» $f = @(x)\ 2. * x.\hat{}2 + 1;$

» feval(f,1)

ans =

3

» f(1)

ans =

3

2)Courbe

• En plus de la fonction 'plot' La fonction 'fplot' permet de tracer la courbe d'une fonction entre deux valeurs.

• **Exemple :**

» $f = @(x)\ 2. * x.\hat{}2 + 1;$

» fplot(f, [0 5])

» %Si f est définie

» %dans un ficher.m

» %en utilise la

» %syntaxe suivante :

» fplot('fct', [0 5])

» %ou

» fplot(@fct, [0 5])

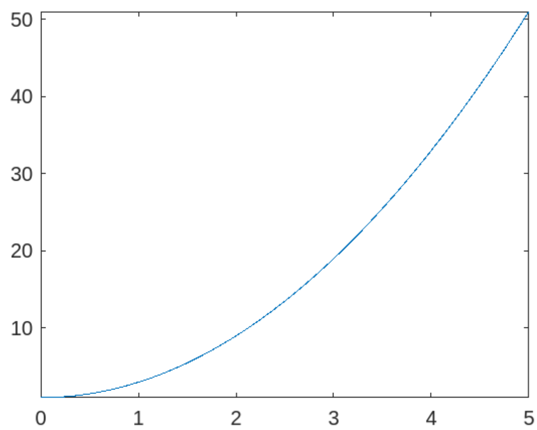

FIGURE 5.1 – La courbe de la fonction f entre 0 et 5.

3)Zéro d'une fonction

• La fonction 'fzero' permet de calculer les zéros d'une fonction à une seule variable.

• 'fzero(f,a)' recherche des zéros de la fonction 'f' autour de 'a'.

• Si 'a' est un scalaire, 'fzero' retourne une valeur près d'un point où 'f' change de signe ou bien 'NaN' si la recherche a échouée.

• 'a' peut être un vecteur à 2 composantes (considéré comme un intervalle) tel que 'f(a(1))' et 'f(a(2))' ont de signes opposées. Si ce n'est pas le cas il y a une erreur.

Exemple :

• $g(x) = x + 2e^{-x} - 3$

function res = $g(x)$

res =$x + exp(-x) - 3$;

return

• Deux zéros : un proche de -0.5 et l'autre proche de 3.

»fplot (@g,[-1 5])

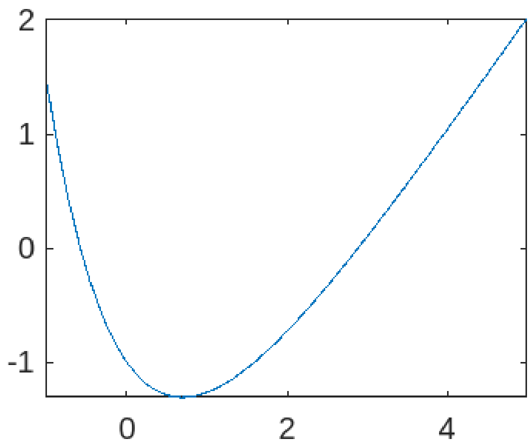

FIGURE 5.2 – La courbe de la fonction g entre -1 et 5.

»fzero(@g,-0.5)

ans =

- 0.5831

»fzero(@g,3)

ans =

2.8887

• Quel est le resultat des commandes suivantes ?

» $f = @(x)\ 2. * x.\hat{}2 + 1;$

» fzero(f,1)

»fzero(@g,[2 4])

»fzero(g,[2 3])

»fzero(g,[-0.5 1])

»fzero(g,[-0.6 0])

»fzero(@sin,3)

»fzero(@sin ,[3 3.5])

»fzero(@cos ,[1.5 2])

• Il ne faut pas oublier de tracer la courbe de la fonction (La fonction 'fplot').

4)Minimum d'une fonction

• La fonction 'fminbnd' permet de trouver le minimum d'une fonction à une seule variable.

• 'fminbnd($f, x1, x2$)' retourne la valeur de x qui minimise la fonction f dans l'intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$.

• **Exemple** 1 **:**

fminbnd(@cos, 0, 4) retourne 3.1416.

• **Exemple** 2 **:**

$y = 1 - xe^{-x}$

function res = $h(x)$

res=$1 - x. * exp(-x)$;

return

• Pour trouver la valeur de x qui donne la valeur minimale de y dans l'intervalle [0,5] :

»x = fminbnd(@h, 0, 5)

x =

1.0000

• Pour trouver la valeur minimale de y :

$y = h(x)$

y

= 0.6321

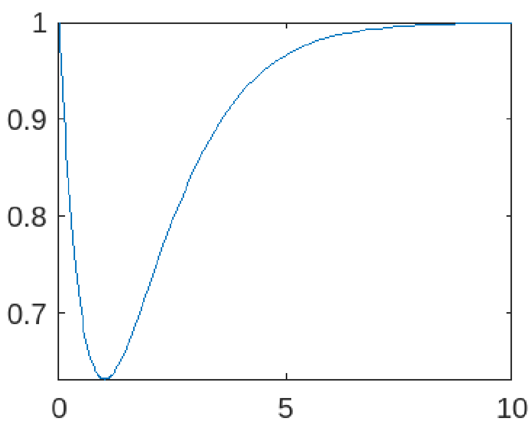

FIGURE 5.3 – La courbe de la fonction h entre 0 et 10.

• Une fonction peut avoir un minimum global et plusieurs minimum locaux.

• $fminbnd(f, x_1, x_2)$ ne retourne pas le minimum global s'il n'est pas inclus dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.

• **Exemple** 3 **:**

$y = 0.025x^5 - 0.0625x^4 - 0.333x^3 + x^2$

» $f = @(x)\ 0.025. * x.\hat{}5 - 0.0625. * x.\hat{}4 - 0.333. * x\hat{}3 + x.\hat{}2;$

»fminbnd(f, 1, 4)

ans =

2.8236

• Cette fonction a un minimum local et un minimum global. Sur l'intervalle [1, 4], le minimum est à $x = 1$.

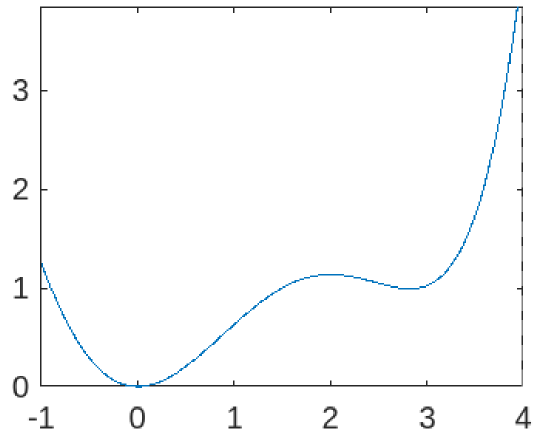

Figure 5.4 – Cette courbe est créée en utilisant la commande : fplot(f,[-1 4]).

5.2 polynômes

1)Rappel mathématique

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

• $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les coefficient de P.

• Le 'degré' de P (Si P n'est pas nul) est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

• **Exemple :**

$P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 4x - 1$ est un polynôme de la variable x et de degré 3.

2)Polynômes sous Matlab

• Les polynômes sous Matlab sont traités comme des vecteurs de coefficients.

• **Exemple :**

L'équation polynômiale $y(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 12$ est representée par le vecteur v = [2 6 5 12].

3)Évaluation d'un polynôme

Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$.

• Si on remplace x par 2 on obtient 15.

• On dit qu'on a évalue le polynôme en $x = 2$.

• 15 est la valeur numérique du polynôme en $x = 2$.

• On dit aussi que 15 est l'image de 2 par P.

En Matlab en utilise la commande 'polyval'.

• **Exemple** 1 **:**

P = [3 -4 6 -5], polyval(P,2).

• **Exemple** 2 **:**

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 5$

» f = [1 3 -6 -5] ;

» x = linspace(-3,3,100) ;

» y = polyval(f,x)

» plot(x,y) ; grid

4)Racines d'un polynôme

• Les racines d'un polynôme sont les valeurs de la variable qui annulent le polynôme.

• Le calcul des racines d'un polynôme en matlab s'effectue avec la commande 'roots'.

• Il est possible de retrouver un polynôme à partir de ses racines, pour cela on utilise la commande 'poly'.

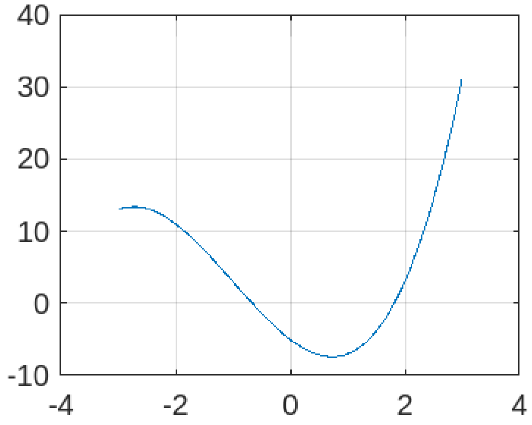

FIGURE 5.5 – La courbe du polynôme f entre -3 et 3.

• **Exemple** 1 **:**

$P(x) = x^2 - 3x + 2$

» P = [1 -3 2] ; %ou bien P = [1 -3 2]′ ;

» racines = roots(p)

racines =

2

1

(Le résultat est un vecteur colonne).

» poly(racines)

ans =

1 -3 2

• **Exemple** 2 **:**

$f(x) = x^2 + 3x + 8$

»f = [1 3 8] ;

»racines =roots(f)

racines =

$-1.5000 + 2.3979i$

$-1.5000 - 2.3979i$

• **Exemple** 3 **:** (polynôme à coefficients complexes)

$g(x) = (1 + i)x^2 + (2 - 3i)x + 3$

» g = [1+i 2-3i 3] ;

» racines =roots(g)

racines =

0.8315 + 3.0771i

- 0.3315 0.5771i

5)Somme, produit et division de polynômes

• Somme : addition matricielle (operateur +).

• Produit : la fonction 'conv'.

• Division : la fonction 'deconv' qui retourne le quotient et le reste.

• **Exemple :**

$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$

» f = [3 -5 1] ;

» g = [1 3 2] ;

» $s = f + g$

s =

4 -2 3

»p =conv(f, g)

$p =$

3 4 -8 -7 2

» $[q, r]$ =deconv(f, g)

$q =$

3

$r =$

0 -14 -5

6)Integrale et dérivée d'un polynôme

• Integrale : la fonction 'polyint'.

• Dérivée : la fonction 'polyder'.

• **Exemple :**

$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

» f = [3 -2 1];

»g = polyint(f)

$g =$

1 -1 1 0

» h = polyder(f)

$h =$

6 2

7)Polynôme d'interpolation

• La fonction 'polyfit' : permet de calculer le polynôme d'interpolation passant par un ensemble de points.

• **Exemple :** Calculer le polynôme de degré 3 passant par les 4 points suivants : $(1,1),(2,-1),(3,2),(4,0)$.

» x1 = [1 2 3 4];

» y1 = [1 -1 2 0];

» plot(x1,y1,'ro');

» %Calculer le polynôme d'interpolation

»p =polyfit($x1, y1, 3$)

» hold on;

»x =linspace($0, 5, 100$);

» y =polyval(p, x)

» plot(x, y);

»title('polynôme d'interpolation-approximation');