Chapitre 3

Vecteurs et matrices

• Matlab travail essentiellement sur des données représentées à l'aide des matrices
.

• Une matrice est un tableau ayant deux dimensions (à plusieurs lignes et colonnes).

• Les valeurs de la matrice (ses éléments) ont le même type qui peut être réel, complexe, chaîne de caractères, etc.

• Chaque élément de la matrice est représenté par sa position :

A(i,j) est l'élément situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A.

les indices des lignes et des colonnes commencent à 1.

• La dimension d'une matrice est représentée comme suit : n×m tels que n et m donnent respectivement le nombre de lignes et le nombre de colonnes de la matrice.

• Un vecteur ligne est une matrice ayant une seule ligne (dimension 1×m).

• Un vecteur colonne est une matrice ayant une seule colonne (dimension n×1).

• Un scalaire est une matrice d'une seule ligne et d'une seule colonne (dimension 1×1).

3.1 Création

Les matrices peuvent être définies de plusieurs façons :

a) Énumération des éléments

— En général, on définit une matrice en donnant la liste de ses éléments entre crochets.

— On sépare les éléments d'une ligne par des blancs ou par des virgules (,).

— On sépare les lignes par des points virgules (;) ou par des retours chariot (Même syntaxe pour les vecteurs).

— Pour les vecteurs colonnes , il est habituel d'utiliser la transposition (sachant que l'opérateur de transposition est l'apostrophe simple).

— On peut déclarer une matrice élément par élément.

b) Construction par blocks

• On peut construire une matrice «par blocs».

• Si A, B, C et D sont 4 matrices (aux dimensions compatibles), on peut définir la matrice K, comme suit : K=[A B ; C D].

c) Opérateur deux points « :»

Il s'utilise avec l'une des deux syntaxes suivantes :

début : incrément : fin.

début : fin (dans ce cas l'incrément vaut 1).

• Il permet de décomposer les nombres compris entre début et fin, avec un intervalle d'incrément.

$D : F$ est le même que $[D, D + 1, \ldots, F]$.

$D : F$ est vide si $D > F$.

$D : I : F$ est le même que $[D, D + I, \ldots, D + m \times I]$ où m = $|(F - D)/I|$.

$D : I : F$ est vide si $I > 0$ et $D > F$ ou $I < 0$ et $D < F$.

d) Matrices spéciales

Certaines matrices se construisent trés simplement grâce à des commandes dédiées. Les plus utilisées sont :

• eye(n) : matrice identité de dimension n.

• ones(n,m) : matrice de dimension n×m dont tous les éléments valent 1.

• zeros(n,m) : matrice de dimension n×m dont tous les éléments valent 0.

• ones(n) : matrice carrée de dimension n dont tous les éléments valent 1.

• zeros(n) : matrice carrée de dimension n dont tous les éléments valent 0.

• rand(n,m) : une matrice à n lignes et m colonnes dont les éléments sont generés aléatoirement entre 0 et 1.

• magic(n) : permet d'obtenir une matrice magique de dimension n.

3.2 Caractéristiques des matrices

• La fonction size(A) retourne la dimension de la matrice A.

• La fonction length(A) retourne la dimension maximale, elle est équivalente à max(size(A)).

3.3 Accès aux éléments

• A(i,j) permet d'acceder à l'élément de la matrice A qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne.

• Il est possible de lire et de modifier la valeur de cet élément.

• A(i) permet d'acceder au i-ème élément de la matrice A.

• En Matlab , les éléments d'une matrice de dimension n×m sont indexés de 1 à n×m de haut en bas et de gauche à droite.

• Il est possible de lire et de modifier la valeur de cet élément.

3.4 Manipulation des sous matrices

• A(v) permet d'accéder aux éléments de la matrice A dont les indices appartiennent au vecteur v.

Si v est un vecteur ligne, le résultat est un vecteur ligne.

Si v est un vecteur colonne, le résultat est un vecteur colonne.

• A(M) permet d'accéder aux éléments de la matrice A dont les indices appartiennent à la matrice M, le résultat est une matrice ayant la même dimension que M.

• A(i, :) permet d'extraire la ligne i.

• A(:,j) permet d'extraire la colonne j.

• A(v1,v2) permet d'accéder aux éléments de la matrice A qui se trouvent à l'intersection des lignes décrits par le vecteur v1 avec les colonnes décrits par le vecteur v2.

• Les commandes précédentes permettent aussi de modifier la matrice.

• Dans le cas d'une modification on est autorisé à dépasser la taille de la matrice initiale. Matlab ajoute les nouvelles valeurs et remplit avec des 0 si aucune valeur n'est spécifiée.

• diag(A) permet d'extraire la diagonale [$\mathrm{a}_{11}; a_{22}; \ldots; a_{nn}$].

• A(:) transforme la matrice A en un vecteur colonne (Vectorialisation).

• tril(A) permet d'extraire la partie triangulaire inf de la matrice A.

- triu(A) permet d'extraire la partie triangulaire sup de la matrice A.

3.5 Opérations sur les matrices

3.5.1 Opérations matricielles usuelles

— **1) Addition et soustraction**

• La somme matricielle (C=A+B) : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

• La soustraction matricielle (C=A-B) : $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

• Se font élément par élément.

• A et B doivent avoir la même dimension.

— **2) Multiplication**

• C = A*B : est le produit matriciel standard, $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$.

• Le nombre des colonnes de A et le nombre des lignes de B doivent être égaux.

• N'est pas commutatif.

• Le nombre des lignes de C= ?

• Le nombre des colonnes de C= ?

— **3) Division matricielle de droite A/B**

• Le résultat est une matrice C tel que A = CB.

• Si B est inversible, alors $C = AB^{-1}$, (B^{-1} est l'inverse de B).

Q1 : est ce qu'il toujours possible d'effectuer l'opération A/B ?

— **4) Division matricielle de gauche A**$\backslash B$

• Le résultat est une matrice C tel que AC = B.

• Si A est inversible, alors $C = A^{-1}B$, (A^{-1} est l'inverse de A).

Q2 : est ce qu'il toujours possible d'effectuer l'opération $A \setminus B$?

RQ1 : Non, le nombre de colonnes de A doit être le même que celui de B.

RQ2 : Le nombre de lignes de A doit être le même que celui de B.

— **5) Puissance C= A**^{n}

• $A^n = A * A * \ldots * A$ (n fois), si $n > 0$. A doit être carrée.

• $A^n = A^{-1} * A^{-1} * \ldots * A^{-1}$ (|n| fois), si $n < 0$. A doit être inversible.

• A^0 = eye(size(A)). A doit être carrée.

3.5.2 Opérations élément par élément

Une operation élément par élément entre deux matrices A et B :

• Consiste a effectuer l'opération entre un élément A et l'élément qui se trouve à la même position dans B.

• Elle se fait en précèdent l'opérateur d'un point.

Les opérateurs élément par élément sont donc : .*, ./, .\, .^:

• C = A.*B : produit élément par élément, $c_{ij} = a_{ij} * b_{ij}$.

• C = A ./ B : division terme à terme des éléments de A par ceux de B, $c_{ij} = a_{ij}/b_{ij}$.

• $C = A. \setminus B$: division terme à terme des éléments de B par ceux de A, $c_{ij} = b_{ij}/a_{ij}$.

• $C = A.\hat{}B$: puissance élément par élément, $c_{ij} = a_{ij}^{b_{ij}}$.

• A et B doivent avoir la même dimension.

Remarque : Matlab ne renvoie pas un message d'erreur lors d'une division par 0 , mais donne le résultat Inf.

3.5.3 Opérations matrice-scalaire

• Si A est une matrice, a est un scalaire, et si op est l'un des operateurs +, -, * alors (A op a) ou (a op A) est la matrice de même dimension que A dont les éléments sont les A(i,j) op a .

• $A./a \equiv$ A./(a*ones(size(A))).

• $A. \setminus a \equiv$ a./A ≡ (a*ones(size(A)))./A.

• $A.\hat{}a \equiv$ A.^$(a * ones(size(A)))$.

• $a.\hat{}A \equiv$ (a*ones(size(A))).$\hat{}A$.

3.5.4 Fonctions matricielles

Matlab dispose d'un grand nombre de fonctions sur les matrices. Nous présentons ici quelques exemples

1) Inverse

• L'inverse d'une matrice s'obtient grâce à la fonction **inv(A)**.

• Les matrices singulières n'ont pas d'inverse.

2) Transposition

• L'opérateur «'» donne la transposé d'une matrice.

• Il permet ainsi de transformer un vecteur ligne en un vecteur colonne et réciproquement.

3) Déterminant

• La fonction **det(A)** permet de calculer le déterminant de la matrice A.

• A doit être une matrice carrée.

4) La somme sum et le produit prod

• Les deux fonctions **sum(A)** et **prod(A)** renvoient deux listes (vecteurs lignes) contenant respectivement la somme et le produit des éléments de chaque colonne de A.

En utilisant la transposé , on peut calculer la somme et le produit des lignes de A.

5) Le max, le min et la moyenne

• Les fonctions **max(A)**, **min(A)** et **mean(A)** renvoient des listes contenant respectivement la valeur maximale, la valeur minimale et la moyenne des éléments de chaque colonne de A.

• En utilisant la transposé, on peut calculer le max, le min et la moyenne des lignes de A.

6) Autres fonctions

• norm(A) : Renvoie la norme de A .

• rank(A) : Renvoie le rang de A , évalue le nombre de lignes et de colonnes linéairement indépendantes.

• trace(A) : Renvoie la trace de A.

• eig(A) : Renvoie les valeurs propres de la matrice carrée A.

• poly(A) : Renvoie les coefficients du polynôme caractéristique associé à la matrice A.

• sort(A) : Ordonner les colonnes de A selon un ordre croissant. Et l'ordre décroissant ?

• reshape(A,n,m) : Redimensionner A, le résultat est une matrice ayant la dimension n*m.