Cours de la programmation linéaire
Pour les étudiants de la première année master mathématiques appliquées et mathématiques fondamentales
Département de mathématiques et informatiques
Université abdelhafid BOUSSOUF MILA
Anné universitaire 2023/2024

Chapitre 2

Table des matières

1

La méthode du simplexe

1.1 La méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une technique algébrique qui permet de trouver la solution optimale d'un programme linéaire d'une façon ordonnée et concise. C'est une méthode itérative qui se base sur le fait de partir d'une solution de base réalisable (solution de départ) et d'augmenter (si on maximise) ou de diminuer (si on minimise) la valeur de la fonction objectif. Comme il a été déjà présenté dans le chapitre 1, un programme linéaire général peut être formulé comme suit :

$$OptF = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{1,1} \quad x_1 + a_{1,2} \quad x_2 + ... + a_{1,n} \quad x_n \quad R_1 \quad b_1 \\ a_{2,1} \quad x_1 + a_{2,2} \quad x_2 + ... + a_{2,n} \quad x_n \quad R_2 \quad b_2 \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ a_{m,1} \quad x_1 + a_{m,2} \quad x_2 + ... + a_{m,n} \quad x_n \quad R_m \quad b_m \\ x_1, \quad x_2, ... \quad x_n \in E, \end{cases}$$

1.1.1 Démarches de la méthode du siplexe

Revenons à l'exemple **??** et essayons d'énoncer les étapes de l'algorithme du simplexe. Soit le programme linéaire suivant :

$$MaxZ = 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Etape 1 : solution de départ
Écrire le programme sous la forme standard, choisir un ensemble initial de variables de base (une solution de départ réalisable), exprimer la fonction objectif en fonction des variables hors-base et écrire le système sous forme d'un tableau. Sous la forme standard l'exemple s'écrit :

$$MaxZ = 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + e_1 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + e_2 = 6 \\ x_1 - x_2 + e_3 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Une solution réalisable de base est obtenue en annulant les variables hors base et en résolvant le système ainsi déterminé pour avoir la valeur des variables de base. La base est une m×n matrice inversible fabriquée en extrayant m colonnes linéairement indépendantes de la matrice A. En choisissant e_1, e_2, e_3 comme variables de base initiales, on obtient une solution réalisable de base de départ immédiatement, soit : $e_1 = 8$, $e_2 = 6$, $e_3 = 2$.
On peut dresser le tableau suivant :

base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b
e_1	1	1	1	0	0	8
e_2	-2	3	0	1	0	6
e_3	1	-1	0	0	1	2
Z	-6	-5	0	0	0	

La dernière rangée contient la fonction objectif exprimée de la façon suivante :
Z- (6 x_1 + 5 x_2). On doit toujours écrire le problème de sorte que le coté droit du tableau soit non négatif. Autrement, la solution de base obtenue n'est pas réalisable.
Etape 2 : choix de la variable rentrante
S'il y a des variables hors-base avec un coefficient négatif dans la dernière rangée, choisir celle qui a le plus petit coefficient comme nouvelle variable de base. On l'appelle variable rentrante.
Si toutes les variables hors-base ont un coefficient positif ou nul dans la dernière rangée, on a une solution optimale. Les nouveaux coefficients obtenus à chaque itération dans la dernière rangée correspondant à la fonction objectif sont appelés coûts réduits. On les note par c_j, $j = 1,...,p$. Cette étape consiste donc à trouver : $c_r = \min_j\ (c_j | c_j < 0)$ et à choisir la nouvelle variable de base (c_r)(variable rentrante, qui a le meilleur potentiel de gain, puisque le plus petit coefficient est celui qui minimise la fonction objectif le plus rapidement.
Etape 3 : recherche de limitation
Déterminer la valeur maximale que peut prendre la variable rentrante dans la base et qui vérifie toutes les contraintes. Pour cela calculer une limitation pour cette variable rentrante. Ceci correspond au rapport entre le coté droit et les coefficients positifs de la variable rentrante. Soit le tableau suivant :

base	.	x_r	.	x_k	.	b
.	.	a_{1r}	.	0	.	b_1
x_k	.	a_{ir}	.	1	.	b_i
.	.	a_{mr}	.	1	.	b_m
Z	.	c_r	.	.	.	c_p

En faisant entrer (x_r) dans la base, on obtient : $x_k = b_i$ - $a_{ir} \times x_r$. Où k est l'indice de la variable de base dans la rangée i. par conséquent si on fait sortir une variable de la base, disons (x_k), elle devient nulle et on a : $0 = b_i$ - $a_{ir} \times x_r$. Pour obtenir une solution réalisable au prochain tableau, il faut sortir de la base variable qui donne la plus petite valeur de x_r, c'est-à-dire la première variable qui prend une valeur non réalisable lorsqu'on augmente (x_r). Cette étape consiste donc à chercher : $x_r = \min_{i=1,...,m}(\frac{b_i}{a_{ir}} |\ a_{ir} > 0) = \frac{b_s}{a_{sr}}$ Où s est l'indice de la rangée avec le plus petit rapport. La variable de base dans la rangée s du tableau est appelée variable sortante de la base. Le coefficient, à l'intersection de la colonne de la variable rentrante et la ligne de la variable sortante s'appelle pivot. Appliquons ceci à notre exemple :

base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b	limitation
e_1	1	1	1	0	0	8	8
e_2	-2	3	0	1	0	6	
e_3	1	-1	0	0	1	2	2
Z	-6	-5	0	0	0	0	
	↑						

Ce tableau indique que x_1 doit rentrer dans la base et que e_3 doit sortir de la base.
Etape 4 : Transformation du tableau
Changer de base, résoudre pour trouver la valeur des nouvelles variables de base et exprimer la fonction objectif en termes des variables hors-base. Retourner à la deuxième étape. Ceci consiste à transformer le tableau de la façon suivante :

— Diviser la rangée de la variable sortante par le pivot.
— Calculer les autres coefficients, en utilisant la méthode du rectangle, par la formule suivante : $a^{`}_{lk} = a_{lk}$ - $a_{sk} \times \frac{a_{lr}}{a_{sr}}$

On doit former un rectangle ayant le pivot comme sommet, et l'élément à modifier comme sommet opposé.
On peut alléger les calculs en sachant que :

— Tous les coefficients de la colonne de la variable rentrante deviennent nulles à part le pivot devient égal à 1.
— Les colonnes des variables de base correspondent aux colonnes de la matrice unité.

Après transformation, le tableau devient :

base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b	limitation
e_1	0	2	1	0	-1	6	3
e_2	0	1	0	1	2	10	10
x_1	1	-1	0	0	1	2	
Z	0	-11	0	0	6	12	
		↑					

Continuons la résolution de même, on obtient le tableau suivant :

base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b	limitation
x_2	0	1	0.5	0	-0.5	3	
e_2	0	0	-0.5	1	2.5	7	
x_1	1	0	0.5	0	0.5	5	
Z	0	0	5.5	0	0.5	45	

Tous les coûts réduits sont positifs ou nuls, on termine. La solution optimale obtenue est : $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, Z = 45.

1.1.2 Résumé de l'algorithme du simplexe

1. Ecrire le programme sous la forme standard, choisir un ensemble initial de variables de base (une solution de départ réalisable), annuler les variables hors-base, exprimer

la fonction objectif en fonction des variables hors-base et écrire le système sous forme d'un tableau.

2. Trouver $c_r = \min_j (c_j | c_j < 0)$ et choisir la nouvelle variable de base, x_r (variable rentrante), qui a le meilleur potentiel de gain, puisque le plus petit coefficient est celui qui minimise la fonction objectif le plus rapidement.
3. Calculer la limitation de x_r : $x_r = \min_{i=1,\ldots,m}(\frac{b_i}{a_{ir}} | \; a_{ir} > 0) = \frac{b_s}{a_{sr}}$. Déduire la variable sortante de la base (variable dans la rangée s) et déterminer le pivot (élément à l'intersection de la colonne de la variable rentrante et la ligne de la variable sortante).
4. Transformer le tableau de la façon suivante :
   — Diviser la rangée de la variable sortante par le pivot.
   — Calculer les autres coefficients, en utilisant la méthode du rectangle, par la formule suivante : $a^{`}_{lk} = a_{lk}$ - $a_{sk} \times \frac{a_{lr}}{a_{sr}}$

Tous les coefficients de la colonne de la variable rentrante deviennent nulles à part le pivot devient égal à 1. Les colonnes des variables de base correspondent aux colonnes de la matrice unité.

Exemple 1.1 *Reprenons le programme linéaire suivant :*

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 40 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 \leq 40 \\ 0.8x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Résoudre le programme linéaire par la méthode du simplexe.

1.2 Résolution d'un programme linéaire général

Dans l'exemple précédent, toutes les contraintes sont de type $\leq$, ceci simplifie le problème puisqu'en l'écrivant sous la forme standard, on obtient une solution réalisable de base de départ. Toutefois, si le problème contient des contraintes de type $\geq$ ou de type $=$, on n'obtient pas une solution réalisable de départ en écrivant le système sous forme standard.
Soit à résoudre le programme linéaire général suivant :

$$OptF = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{1,1} \quad x_1 + a_{1,2} \quad x_2 + ... + a_{1,n} \quad x_n & \leq \quad b_1 \\ a_{2,1} \quad x_1 + a_{2,2} \quad x_2 + ... + a_{2,n} \quad x_n & \geq \quad b_2 \\ a_{m,1} \quad x_1 + a_{m,2} \quad x_2 + ... + a_{m,n} \quad x_n & = \quad b_m \\ x_1, \quad x_2, ... \quad x_n \geq 0, \end{cases}$$

La forme standard est :

$$MaxF = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{1,1} \quad x_1 + a_{1,2} \quad x_2 + ... + a_{1,n} \quad x_n \quad + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{2,1} \quad x_1 + a_{2,2} \quad x_2 + ... + a_{2,n} \quad x_n \quad - x_{n+2} & = b_2 \\ a_{m,1} \quad x_1 + a_{m,2} \quad x_2 + ... + a_{m,n} \quad x_n \quad + 0 = & b_m \\ x_1, \quad x_2, ... \quad x_n \geq 0, \end{cases}$$

Pour résoudre le problème par la méthode du simplexe, il faut chercher une solution réalisable de base de départ. Soient x_{n+1} et x_{n+2} les variables de base choisies. En annulant les variables hors-base, le système devient :

$$\begin{cases} x_{n+1} \quad = b_1 \\ -x_{n+2} \quad = b_2 \\ 0 \quad = b_3 \end{cases}$$

Cette solution de départ ne convient, elle n'est pas réalisable. Pour déterminer une solution de départ réalisable on utilise des variables artificielles (y_i) dans les relations de type $\geq$ et les relations de type $=$.
Le système devient :

$$MaxF = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{1,1} \quad x_1 + a_{1,2} \quad x_2 + ... + a_{1,n} \quad x_n \quad + x_{n+1} = & b_1 \\ a_{2,1} \quad x_1 + a_{2,2} \quad x_2 + ... + a_{2,n} \quad x_n \quad - x_{n+2} \quad + y_1 = & b_2 \\ a_{m,1} \quad x_1 + a_{m,2} \quad x_2 + ... + a_{m,n} \quad x_n \quad + 0 \quad + y_2 = & b_m \\ x_1, \quad x_2, ... \quad x_n, y_1, y_2 \geq 0, \end{cases}$$

Pour résoudre le problème par la méthode du simplexe, il faut chercher une solution réalisable de base de départ. Soient x_{n+1} et y_1, y_2 les variables de base choisies. En annulant les variables hors-base, le système devient :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = b_1 \\ y_1 & = b_2 \\ y_2 & = b_3 \end{cases}$$

Toutefois, pour que la solution obtenue soit valide, tous les y_i doivent être égal à zéro dans le tableau final (doivent être hors base). Pour s'assurer que ces variables artificielles ne seront pas dans la solution optimale, on leur associe un coût fictif (M) arbitrairement grand (M $= +\infty$) lorsqu'il s'agit d'un problème de minimisation ou un profit fictif arbitrairement petit (-M $= -\infty$) lorsqu'il s'agit d'un problème de maximisation.
L'expression de la fonction économique est donc :

$$MaxF = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - My_1 - My_2$$

Exemple 1.2

$$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

On commence par mettre le programme linéaire sous la forme standard :

$$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - x_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

En introduisant les variables artificielles le système devient :

$$MaxZ = 3x_1 + 2x_2 - My_1 - My_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 10 \\ x_1 - x_3 + y_2 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

La solution de base de départ est :

$$\begin{cases} y_1 & = 10 \\ y_2 & = 4 \end{cases}$$

On aura le tableau initial :

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	
y_1	1	1	0	1	0	10	$\times(M)$
y_2	1	0	-1	0	1	4	$\times(M)$
Z	-3	-2	0	0	0	0	
	0	0	0	M	M	0	(-)(-)

Dans ce tableau on sépare les coefficients de la fonction objectif en deux lignes, la deuxième ligne comporte les coefficients des variables artificielles. Les deux dernières lignes du tableau se lisent :
Z - (3+0) x_1 - (3+0) x_2 - (0+M) y_1 - (0+M) y_2 = 0.
Cette expression n'est pas en fonction des variables hors-base seulement et, par conséquent il faut la transformer pour que les coefficients de y_1 et y_2 soient nuls. Ceci permet d'éviter que l'une des variables artificielle soit une variable rentrante dans la base. Le tableau devient :

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	Limitation	
y_1	1	1	0	1	0	10	10	
y_2	1	0	-1	0	1	4	4	$\longrightarrow$
Z	-3	-2	0	0	0	0		
	-2M	-M	M	0	0	-14M		

On peut commencer la résolution. La première itération donne :

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	Limitation	
y_1	0	1	1	1		6	6	
x_1	1	0	-1	0		4	pas de limitation	$\longrightarrow$
Z	0	-2	-3	0		12		
	0	-M	-M	0		-6M		

Une fois qu'une variable artificielle est sortie de la base, on peut négliger la colonne correspondante dans le tableau.
La deuxième itération donne :

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	
x_2	0	1	1			6	
x_1	1	0	-1			4	
Z	0	0	-1			24	
	0	0	0			0	

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b	
x_3	0	1	1			6	
x_1	1	1	0			10	
Z	0	1	0			30	

On atteint la solution optimale lorsque tous les coûts réduits sont non négatifs, c'est-à-dire que tous les coefficients de la première ligne de (-Z) sont non négatifs et que tous les coefficients de sa deuxième ligne sont nuls.
Dans ce cas, la solution optimale obtenue est :
$x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $Z^\star = 30$.

Exercice 1.1 *Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode Big M :*

$$MaxZ = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq \frac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq \frac{7}{3} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$