Centre Universitaire Abdelhafid Bousouf Mila 2023/2024

Institut des sciences et de technologie **Probabilité**

3ième année Informatique (LMD)

Série N 3

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire discrète qui prend des valeurs entières comprises entre 1 et 9 avec les probabilités :

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = a(10 - k).$$

(1) Déduire la valeur de a.

(2) Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et déduire $Var(X)$.

Exercice 2 :

Une boite contient 5 jetons portant le numéro 1, 5 jetons portant le numéro 2 et 5 jetons portant le numéro 3. On tire au hasard un jeton dans la boite et on note X le numéro du jeton tiré.

(1) Détérminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.

(2) Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

(3) Calculer$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2)$.

Exercice 3 :

Soient X un variable aléatoire discrète et F_X sa fonction de répartition, montrer que

1) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) F_X est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point.

3) $\lim_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.

4) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

5) Les deux fonctions de répartitions $F_X = F_Y$ si et seulement si les variables aléatoires X et Y ont même loi.

6) $\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - F_X(a)$.

7) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Exercice 4 :

On lance un dé bien équilibré deux fois. Soit X une variable aléatoire définie par "*le nombre maximal de deux numéros obtenus*".

(1) Détérminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.

(2) Calculer $E(X)$ et déduire $Var(X)$.

. (3) Calculer $\mathbb{P}(X \leq 4)$, $\mathbb{P}(X > 3)$, $\mathbb{P}(2 < X \leq 5)$.

Exercice 5 :

On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué. S'il obtient 1, 2 ou 3, il gagne l'équivalent en DZ (c'est-à-dire 1 DZ s'il obtient 1, par exemple). Sinon, il perd 2 DZ. On note X la variable aléatoire correspondant au gain de joueur (négatif en cas de perte).

(1) Donner la loi de X et sa fonction de répartition F_X.

(2) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 6 :

Peut-on considérer les expressions suivantes comme des densités de probabilité de variables aléatoires :

(1) $f_1(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a \leq x \leq b$ et $f_1(x) = 0$ ailleurs.

(2) $f_2(x) = \frac{|x|}{a^2}$ si $-a \leq x \leq a$ et $f_2(x) = 0$ ailleurs.

Exercice 7 :

Déterminer a, b et c pour que les fonctions suivantes soient des densités de probabilité :

(1) $f_1(x) = \frac{a}{x}$ si $1 \leq x \leq e$ et $f_1(x) = 0$ ailleurs.

(2) $f_2(x) = \frac{1}{2}e^{-bx}$ si $x \geq 0$ et $f_2(x) = 0$ ailleurs.

(3) $f_3(x) = \frac{c}{4}$ si $0 \leq x \leq c$ et $f_3(x) = 0$ ailleurs.

Exercice 8 :

Soient X une variable aléatoire continue et F_X sa fonction de répartition. Montrer les relations suivantes :

(1) $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

(2) $\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - F_X(a)$.

(3) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b)$.

Exercice 9 :

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha x(4-x), & si\ x \in [0,4] \\ 0, & si\ \ x \notin [0,4] \end{cases}$$

(1) Calculer la constante α.

(2) Déterminer la fonction de répartition de X.

(3) Déterminer la probabilité des événements : $[1 \leq X \leq 2]$, $[X > 3]$.

(4) Calculer $E(X)$.

.

..