المحاضرة الثانية: قانون بواسون

(قانون الظواهر النادرة، قانون الاحتمالات الصغيرة)

تمهيد:

ينسب هذا القانون إلى مكتشفه سيمون دنيس بواسون عام 1837، ويعتبر قانون بواسون من التوزيعات الاحتمالية المنقطعة الهامة، ويعتمد عليه في المجالات العلمية التي ينصب الاهتمام فيها على إيجاد توزيعات عدد المرات التي تشاهد فيها ظاهرة عشوائية خلال وحدة معينة، ومثال ذلك:

- عدد العملاء الذين يصلون إلى أحد البنوك كل دقيقة.
- عدد الأخطاء في الأعمال (كتابة، طباعة) في كل صفحة.
- عدد حوادث المرور في مدينة ما خلال فترة زمنية معينة.
- عدد المكالمات الهاتفية في فترة زمنية معينة.
- عدد آلات الإنتاج التي تتعطل في مصنع خلال فترة زمنية معينة.

وتوضح الأمثلة السابقة الذكر مدى تنوع واتساع استخدام هذا التوزيع في حياتنا العملية، ويطلق على التجربة التي تقدم لنا قيما عددية لمثل هذه المتغيرات إسم التجربة البواسونية التي تتميز بالخصائص التالية:

- إن عدد النجاحات التي يتم الحصول عليها في وحدة قياس معينة مستقلة عن عدد هذه النجاحات في وحدات قياس أخرى، وإن تساوت هذه الأخيرة.
- المحاولات مستقلة.
- احتمال النجاح ثابت من محاولة إلى أخرى.

1. دالة الكثافة الاحتمالية:

يهتم قانون بواسون بصورة خاصة بعدد حالات النجاح المتوقعة في الوحدة (زمن، مكان، طول، حجم...الخ)، ويسمى المتغير الذي يحقق هذه الخواص بمتغير بواسون أو المتغير البواسوني، وتعرف دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع كما يلي:

$$p(X=x)=\begin{cases} e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^{x}}{x!} & x=0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

حيث:

λ: هي معلمة التوزيع، وهي مقدار ثابت.

e: أساس اللوغاريتم الطبيعي.

x: قيم المتغير العشوائي X.

ويمكن التأكد من أن دالة الاحتمالية لتوزيع بواسون هي دالة كثافة احتمالية كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$\forall\, x \,/\, x \in \aleph \quad : \quad f(x) \geq 0$$

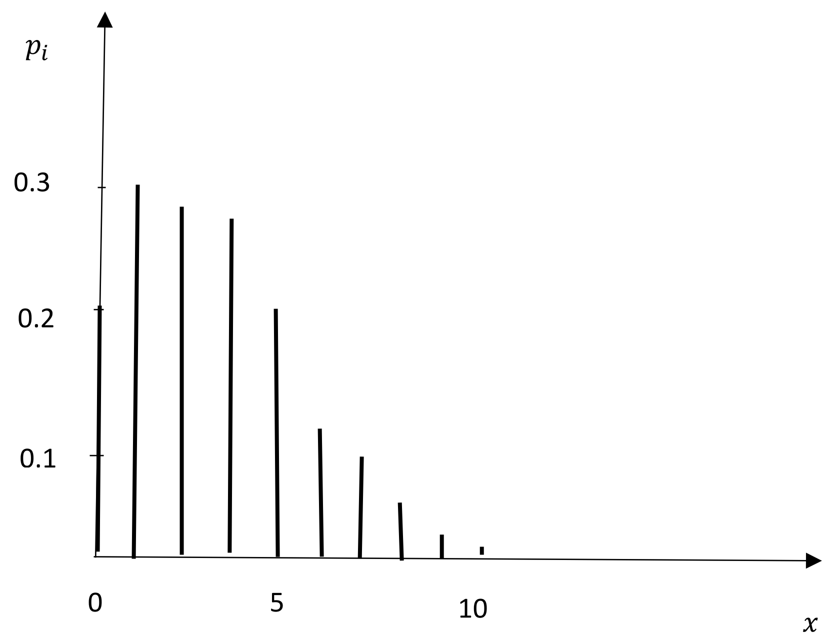
$$\sum_{x=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1$$

ملاحظة:

$\frac{\lambda^x}{x!}$: هو فك الحد العام التسلسلي التام للمقدار e^{λ} .

أما فيما يخص التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون فعلى العموم يكون التمثيل البياني ملتويا نحو اليمين (إلتواء موجب)، وكلما زادت قيمة λ فإن الشكل يقترب من التماثل كما تقل المسافة بين أي نقطتين متتاليتين، وكلما كبر n كلما أصبحت نقاط المنحنى متتالية أكثر تلاصقا، كما يصبح المنحنى مستمرا ويقترب من التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي.

الشكل 1: التمثيل البياني لقانون توزيع بواسون



ملاحظة:

هناك العديد من المراجع التي تدرج في نهايتها ملاحق جداول تعكس توزيع الاحتمالات، أي قيم قانون التوزيع الاحتمالي البواسوني عند مجموعة من التجارب (المشاهدات) والاحتمالات.

مثال:

يوضح الجدول الموالي قيم تابع التوزيع لبواسون من أجل بعض القيم لـ λ:

x \ λ	0.1	0.2	0.3
0	0.9048	0.8187	0.74008
1	0.0905	0.1637	0.2222
2	0.0045	0.0164	0.0333
3	0.0002	0.0011	0.0033

فمن أجل القيم $\lambda = 0.1$ و $x = 1$ فإن: $p(x = 1) = 0.0905$

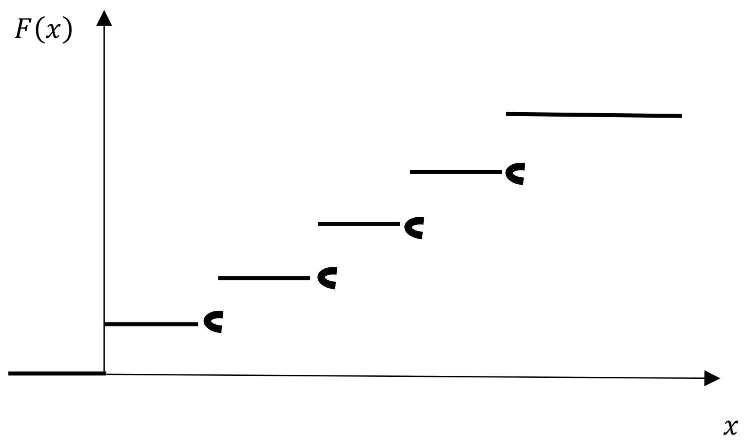
2. تابع التوزيع لقانون بواسون:

يعرف تابع التوزيع لقانون بواسون وفق الصيغة الرياضية التالية:

يأخذ الشكل البياني لتابع التوزيع البواسوني شكل السلم كأي توزيع احتمالي كما يظهر في الشكل الموالي:

$$p(X \leq x) = \sum_{x=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

ويأخذ الشكل البياني المقابل لتابع التوزيع شكل السلم كاي توزيع متقطع، وهذا ما يعكسه الشكل الموالي:



ملاحظة:

هناك الكثير من المراجع التي تدرج في نهايتها ملاحق بها جداول تعكس توزيع الاحتمالات التراكمية، أي قيم تابع التوزيع عند مجموعة من التجارب والاحتمالات.

مثال:

يوضح الجدول الموالي القيم الاحتمالية التراكمية لـ x من أجل بعض القيم لـ λ:

x \ λ	0.1	0.2	0.3
0	0.9048	0.8187	0.7408
1	0.9953	0.9825	0.9631
2	0.9998	0.9988	0.9964
3	1	0.9999	0.9997
4		1	1

فمن أجل القيم $\lambda = 0.1$ و $x \leq 1$ فإن: $p(x \leq 1) = 0.9953$

3. المميزات العددية

يمكن توضيح المميزات العددية لتوزيع بواسون من خلال مايلي:

1.3. التوقع الرياضي:

يتطلب تطبيق قانون بواسون معرفة قيمة التوقع الرياضي المساوي لقيمة المعلمة λ كما يتضح من خلال الآتي:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} x \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda}$$

$$E(X) = \lambda$$

2.3. التباين:

يعرف التباين وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} x^1 \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$V(X) = \lambda$$

3.3. الدالة المولدة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع كما يلي:

$$\mathrm{M}_x(T) = (e^{xt})$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{xt} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} e^{xt} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

$$= e^{-\lambda + \lambda e^t}$$

$$M_x(T) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

مثال:

يستلم أحد البنوك شيكات بدون رصيد بمعدل 6 شيكات في اليوم الواحد.

المطلوب:

- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- ما هو احتمال أن يستلم البنك 3 شيكات بدون رصيد في اليوم.
- ما هو احتمال أن يستلم البنك في يوم ما شيك واحد على الأقل بدون رصيد.

الحل:

ليكن المتغير العشوائي X يمثل **عدد** الشيكات التي يستلمها البنك بدون رصيد **في اليوم الواحد**.

- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

$$p(X = x) = e^{-6}\ \frac{6^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,\dots,n$$

- احتمال أن يستلم البنك 3 شيكات بدون رصيد في اليوم:

$$p(X = 3) = e^{-6}\ \frac{6^3}{3!} = 0.072$$

- احتمال أن يستلم البنك في يوم ما شيك واحد على الأقل بدون رصيد:

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 0.998$$