Qu’est ce qu’une matrice

- Simplement
- Algorithmique
- Algèbre

$$A: \{1, .., \mathrm{n}\} \times \{1, .., \mathrm{m}\} \rightarrow \mathrm{K}$$

$$(i, j) \quad \rightarrow \; a_{ij}$$

$$1 \leq i \leq n$$

$$1 \leq j \leq m$$

Exemple

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

application :

$$(1,1) \rightarrow 1 \quad (2,1) \rightarrow 3$$
$$(1,2) \rightarrow 0 \quad (2,2) \rightarrow 2$$
$$(1,3) \rightarrow 5 \quad (2,3) \rightarrow 1$$

Notations

- $M_{n,m}(K), \quad M_n(K)$

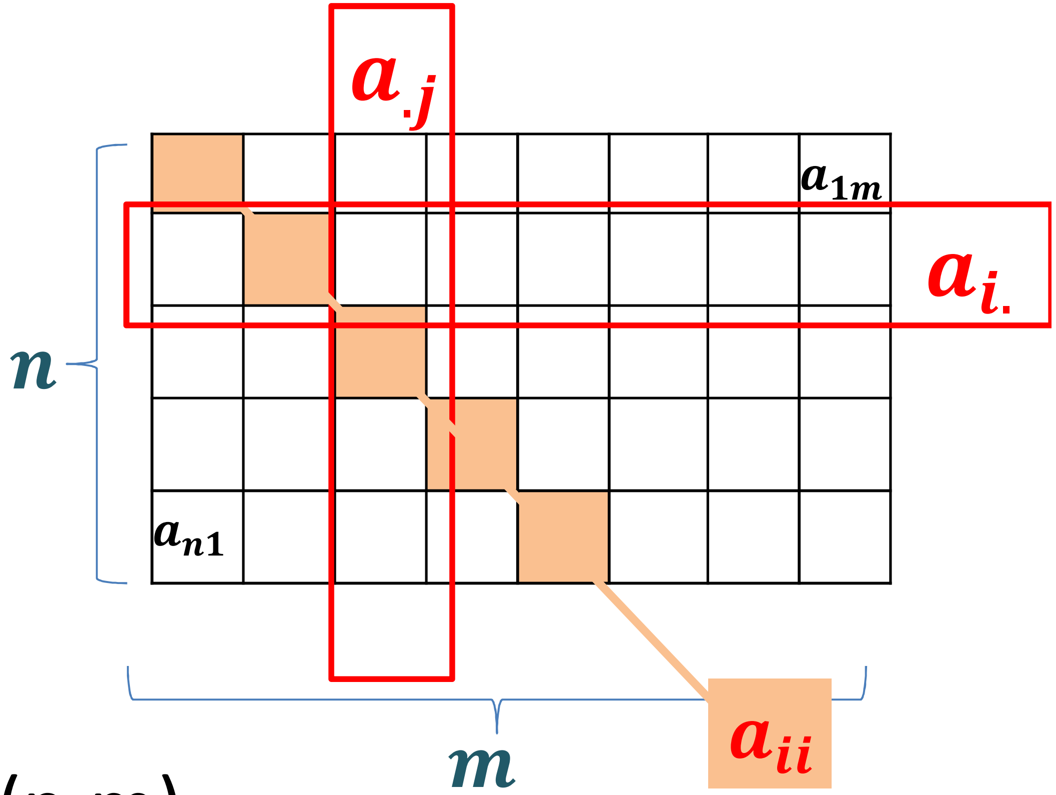
  $1 \leq i \leq n$

  $1 \leq j \leq m$

- $a_{i.}$: vecteur 1xm

  $a_{.j}$: vecteur nx1

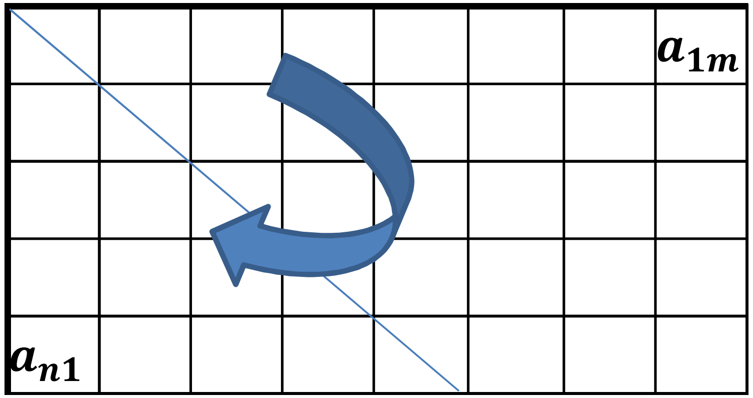
  a_{ii} : vecteur 1 x min(n,m)



Notations

- $(A^t)_{ji}$ matrice **transposée** de $(A)_{ij}$

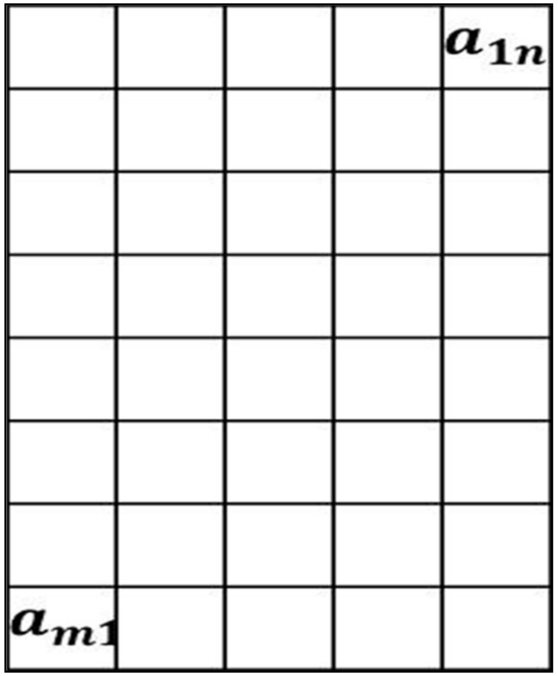
  $$(A^t)^t = A$$



- $(A^*)_{ji}$ matrice **adjointe** de $(A)_{ij}$

  $$(A^*)_{ji} = (\overline{A^t})_{ji}$$

  $$(A^*)^* = A$$



- $M_{1,m}(K)$, $M_{n,1}(K)$

Opérations sur les matrices

Soient A, B, C $\in M_{n,m}(K)$,

$$\forall (i,j) \in \{1,..,\mathrm{n}\} \times \{1,..,\mathrm{m}\}$$

- Egalité $a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow A = B$
- Addition $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $0_{n,m}$
- Multiplication par un scalaire

$$C = \lambda A \Leftrightarrow c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

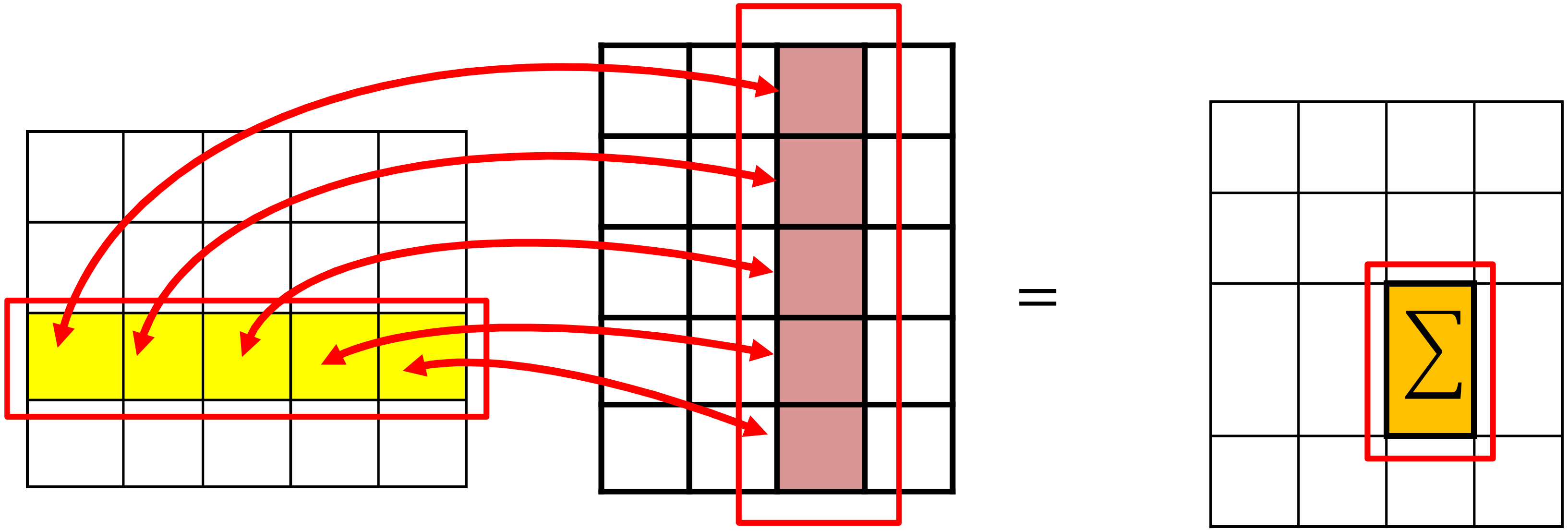
$$(\lambda A)^t = \lambda A^t,$$

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

Produit de matrices



$A \in M_{n,\boldsymbol{p}}(K)$ $B \in M_{\boldsymbol{p},m}(K)$ $C \in M_{n,m}(K)$

- $C = A\,B \iff C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Matrice identité

- $I_n = \delta_{ij} = \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}$

$A \in M_{n,\boldsymbol{p}}(K),\ I_p \qquad A\,.I = A$

Propriétés

- $A + B = B + A$,

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(A + B)^* = A^* + B^*$$

- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A \,.\, B \quad \neq \quad B.A$

$$(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$$

$$(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$$

- $A \,.\, (B.C) = (A \,.\, B).C$

Propriétés

- $A = 0$ ou/et $B = 0 \Rightarrow A\,.\,B = 0$
- $A\,.\,B = 0 \nRightarrow A = 0\ ou\ B = 0$

- $A^p = A \cdot A \cdot \ \dots \ \cdot A$ p fois
  $A^0 = I$

Inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(K)$,

- L'inverse de A est noté A^{-1}
- Existence

  $\exists ?\ A^{-1}$ tq $\quad A \cdot A^{-1} = I_n$

- Propriétés

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$$

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Inverse d'une matrice

Exemples :

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

$a = 1 - 2c \quad c = 0$

$b = -2d \quad d = 1/3$

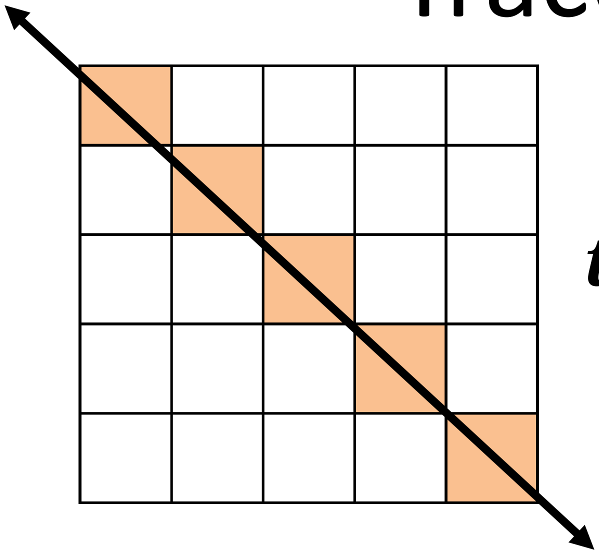
$$A^{-1} = \begin{matrix}1 & -2/3\\0 & 1/3\end{matrix}$$

$$A = \begin{matrix}3 & 0\\5 & 0\end{matrix} \quad \nexists\, A^{-1}$$ A est singulière, non inversible

$I^{-1} = I$

La matrice nulle n'est jamais inversible

Trace d'une matrice



$$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ii}}$$

- $tr(\alpha A + B) = \alpha \cdot tr(A) + tr(B)$
- $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

Déterminant d'une matrice

$$\det : \begin{cases} M_n(K) & \rightarrow & K \\ (A_{\boldsymbol{i,j}}) & \rightarrow & y \end{cases}$$

Exemple :

soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ → $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

Propriétés du déterminant

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$$

$$\det\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$\det\ A^{t} = \det A$$

$$det\ A^{*} = \overline{\det A}$$

$$\det I_n = 1$$

Propriétés du déterminant

- $\det A = 0$ pour 3 cas

  - $A = 0_n$

  Posons : $\text{A} = [C_1 \quad \ldots \quad C_k \quad \ldots \quad C_l \quad \ldots \quad C_n]$

  - Si $\exists\ 1 \leq k \leq l \leq n$ tel que $C_k = C_l$

  - Si $\exists\ k\ tel\ que\ C_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i C_i$

Calcul du déterminant

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$

- $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} a & d & g & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d} \\ b & e & h & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{e} \\ c & f & i & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{f} \end{array}$

$$= aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

Calcul du déterminant

- Mineurs de A $\in M_n(K)$

$$(A_{ij}) = \begin{array}{ccccc} a & d & \dots & x & \\ b & e & \dots & y & \leftarrow \boldsymbol{i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c & f & \dots & z & \\ & \uparrow & & & \\ & \boldsymbol{j} & & & \end{array}$$

$\det A_{ij}$ = mineur de A d'ordre n-1

- Cofacteur de (A_{ij})

$$c_{ij} = Cof_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

- $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, c_{ij}$

Exemple 1:

$$\mathrm{A}=\begin{matrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{matrix}$$

$$\det A = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} + d(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} + g(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

$$\det A = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} + b(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} + c(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$$

Exemple 2:

$$A=\begin{matrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$\det A = 0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 82$$

Calcul de l'inverse de A

Soient : $A \in M_n(K)$

$C = Com(A) = \left(C_{ij}\right)$ tel que $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t}$$

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \text{, } \det A = 2 \rightarrow A \text{ Non singulière}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$$

Matrices particulières

<u>Matrice diagonale</u>

?	0	0	0
0	?	0	0
0	0	?	0
0	0	0	?

- Somme est une diagonale
- Produit est une diagonale
- $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$,
- $\forall i, a_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible

$\frac{1}{a_{11}}$	0	0	0
0	$\frac{1}{a_{22}}$	0	0
0	0	$\ddots$	0
0	0	0	$\frac{1}{a_{nn}}$

Matrices particulières

<u>Matrice triangulaire</u>

Supérieure inferieure

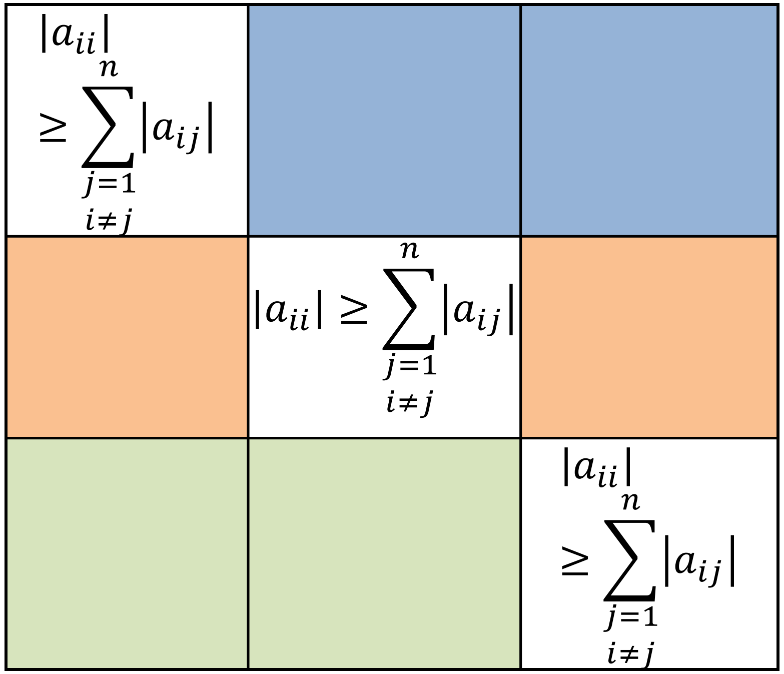
- $\begin{matrix} ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{matrix}$ $\begin{matrix} ? & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? \end{matrix}$

- $\det A = \prod_{i=1..n} a_{ii}$
- A^{-1}
- $A \cdot B$

Matrices particulières

- Matrice a diagonale dominante
- (strictement >)

par ligne



par colonne