Centre Universitaire Abdelhafid BOUSSOUF-Mila
Institut de science et de technologie

Département de Génie Mécanique et d'Electromécanique
Master II Electromécanique
Module Techniques de Commande Avancés **année universitaire 2022/2023**

TD 01

Exercice 01 :

On considère le système a m entrée, p sortie et d'ordre n associe à la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx}\end{cases}$$

1. Quelles sont les dimensions des matrices A, B et C ?
2. Quel nom donne-t-on à la matrice A, B et C ?
3. Que représentent les valeurs propres de la matrice A ?
4. Que doit satisfaire A pour que le système soit stable ?
5. Donner l'expression de la fonction de transfert du système en fonction de A, B et C.
6. Donner la condition portant sur A et B pour que le système soit commandable.
7. Ecrire l'expression générale de la commande par retour d'état et donner une représentation schématique du coupe système retour d'état.

Exercice 02 :

Le comportement dynamique d'un système est décrit par le système des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{y}}_1 + 3\dot{\boldsymbol{y}}_2 + 4\dot{\boldsymbol{y}}_1 + \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 \\ \ddot{\boldsymbol{y}}_2 + 2\ddot{\boldsymbol{y}}_1 + \dot{\boldsymbol{y}}_2 + \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2\end{cases}$$

1. On pose comme variables d'état : $x_1 = y_1$, $x_1 = y_2$, $x_3 = \dot{y}_1$ et $x_4 = \dot{y}_2$. Donner l'équation d'état de ce système.
2. Quelle est l'équation de sortie si y_1 et y_2 sont les sortie de système ? répondre à la même question si les sorties sont y_1 et $\dot{y}_2$.

Exercice 03 :

On donne la fonction de transfert d'un système en boucle ouverte :

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{s}) = \frac{\boldsymbol{10}(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{20})}{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{3})(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{10})}$$

1- Déterminer la représentation d'état de ce système, une représentation d'état à mettre sous la forme :

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx}\end{cases}$$

2- L'objectif est d'avoir une réponse indicielle de ce système en boucle fermée, avec un dépassement de 9.5% et ce premier dépassement ait lieu à $t_{peak} = 165\ ms$.

a- Déterminer le coefficient d'amortissement ξ.

b- En déduire la pulsation propre ω_n du système.

3- Donner le polynôme de second degré $D(s) = s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2$.

4- Calculer le gain du retour d'état $K = [\,k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]$, qui permettrait d'atteindre l'objectif précisé à la Question 2, le polynôme caractéristique désiré contiendra aussi le pôle -20, afin de compenser le zéro de la fonction de transfert.

Exercice 04 :

Soit le système d'entrée u et de sortie y, décrit par les équations différentielles linéaires suivantes :

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 + 2\boldsymbol{x}_1 - 4\boldsymbol{x}_2 = 5\boldsymbol{u}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 - \dot{\boldsymbol{x}}_2 + 4\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 0$$
$$\boldsymbol{y} = \dot{\boldsymbol{x}}_1 - \dot{\boldsymbol{x}}_2$$

1. Représenter le système sous une forme d'état.

2. Calculer sa fonction de transfert $\boldsymbol{H(s)} = \frac{\boldsymbol{Y(s)}}{\boldsymbol{U(s)}}$.
3. Est-ce que le système est stable ? justifier ?
4. Pour une entrée $\boldsymbol{u} = \mathbf{1}$ et la condition initiale $\boldsymbol{x(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$, calculer la sortie $y(t)$.
5. Vérifier la commndabilité du système.
6. Concevoir une commande par retour d'état de gain $\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{k_1} \;\; \boldsymbol{k_1}]$ permettant de placer les pôles en boucle fermée à : $\mathbf{-3} \pm \boldsymbol{j}\mathbf{6}$.

Exercice 05 :

On considère le système régi par l'équation d'état suivante :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \;\; \textbf{avec} \;\; \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-4} \end{bmatrix} \textbf{ et } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Montrer que ce système est commandable et déterminer les performances dynamiques du système (temps de montée et dépassement), dans le cas d'une commande par retour d'état avec un vecteur de gain $K = [\mathbf{-55} \;\; \mathbf{-68}]$ et un signal de consigne en échelon unité.

Exercice 06 :

On considère le système régi par l'équation d'état suivante :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \;\; \textbf{avec} \;\; \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-8} \end{bmatrix} \textbf{ et } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}.$$

Etudier la commandabilité de ce système et calculer le vecteur de gain K à introduire dans une boucle de retour d'état pour que le système, en boucle fermé est soumis à un échelon unitaire de consigne, soit caractérisé par une marge de phase de 45° et par un temps de montée $t_m = 0.4s$.

Exercice 07 :

Soit le système donné par sa représentation d'état suivante :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \textbf{ et } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} \;\; \textbf{avec} \;\; \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{10} \end{bmatrix},\; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \textbf{ et } \boldsymbol{C} = [\mathbf{0}\;\mathbf{1}].$$

1. Etudier la stabilité du système.
2. Calculer la fonction de transfert du système.
3. Calculer la réponse indicielle du système avec $\boldsymbol{x(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$.
4. Le système est–il commandable ?
5. Mettre le système sous forme commandable si possible.
6. Calculer la loi de commande par retour d'état $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{Kx} + \boldsymbol{y_r}$, permettant de placer les pôles en boucle fermée à $\mathbf{:-2}\ \boldsymbol{et} - \mathbf{3}$.
7) Calculer la valeur finale de la réponse du système en boucle fermée à un échelon unitaire.

Exercice 08 :

Considérons le système donné par sa représentation d'état suivante :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \textbf{ et } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} \;\; \textbf{avec} \;\; \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-5} & \mathbf{-6} \end{bmatrix},\; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} \textbf{ et } \boldsymbol{C} = [\mathbf{2} \;\; \mathbf{-9} \;\; \mathbf{2}].$$

1. Etudier la stabilité du système.
2. Vérifier la commandabilité du système.
3. Calculer le gain K commande par retour d'état $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{Kx} + \boldsymbol{dy_r}$ permettant placer les pôles en boucle fermée à $\mathbf{:-2 \pm 2}\boldsymbol{j}$ **et** $= \mathbf{-5}$.
4. Calculer le gain de pré-compensation $\boldsymbol{d}$ qui assure une erreur statique de **10%**.

Exercice 09 :

On considère le système d'entrée u et de sortie y représenté par l'équation différentielle suivante :

$$\dddot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{2}\,\ddot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{3}\dot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{3}\ddot{\boldsymbol{u}} + \mathbf{2}\dot{\boldsymbol{u}} + \mathbf{3}\boldsymbol{u}$$

1. Ecrire sa fonction de transfert $\boldsymbol{H(\,s)}$ avec des conditions initiales nulles.
2. En déduire une représentation d'état sous forme compagne de commande.
3. On met en place un retour d'état $= -\boldsymbol{Kx}$. Trouver $\boldsymbol{K}$ de façon à placer les valeurs propres à $\mathbf{-1}, \mathbf{-2}$ et $\mathbf{-3}$.