Chapitre5 : système à plusieurs degrés de liberté.

5.1.Degré de liberté

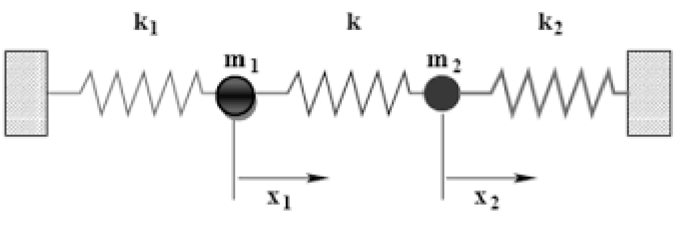
Le nombre de degré de liberté est défini par le nombre de variables indépendantes nécessaires à la description du mouvement d'un système.

Soit un système à n degrés de liberté, soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel,à des forces de frottement de viscosité et des forces extérieures. Si les coordonnéesgénéralisées sont q_1,q_2……..q_n les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q_1}}\right) = F_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_2}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_2}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q_2}}\right) = F_2 \\ \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_n}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q_n}}\right) = F_n \end{cases} \qquad (5.1)$$

5.2. Equations du mouvement d'un système à deux degré de liberté

Les deux variables indépendantes sont x_1 et x_2, l'élément de couplage est le ressort K comme représenté la figure suivante :



L'énergie cinétique de ce système est donnée par

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

Et l'énergie potentielle est donnée par

$$U=\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

Le Lagrangien est

L=T-U=$\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{1}{2}k(x_1-x_2)^2$

Le système d'équations différentielles s'écrit comme suivant :

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m_1\ddot{x}_1+(K_1+K)x_1-Kx_2=0\\ m_2\ddot{x}_2+(K_2+K)x_2-Kx_1=0\end{cases}\qquad(5.2)$$

On se propose des solutions sinusoïdales pour résoudre ce système d 'équations différentielles linéaires, où les masses oscilleront à la même pulsation ω_p avec des amplitudes différentes et des phases différentes.

5.3.Modes propres

La solution du système précédent est de la forme suivante

$$x_1(t)=A\cos(\omega_p t+\varphi)$$

Et

$$x_2(t)=B\cos(\omega_p t+\varphi)$$

Alors :

$$\dot{x}_1(t)=-A\omega\sin(\omega_p t+\varphi)$$

$$\dot{x}_2(t)=-B\omega\sin(\omega_p t+\varphi)$$

Et

$$\ddot{x}_1(t)=A\omega^2\cos(\omega_p t+\varphi)$$

$$\ddot{x}_2(t)=B\omega^2\cos(\omega_p t+\varphi)$$

En remplaçons par $x_1(t)$, $\ddot{x}_1(t)$, $x_2(t)$ et $\ddot{x}_2(t)$,

Le système devient comme suivant :

$$\begin{cases}\left(-\omega_p{}^2+\frac{K_1+K}{m_1}\right)A-\frac{K}{m_1}B=0\\ -\frac{K}{m_2}A+\left(-\omega_p{}^2+\frac{K_2+K}{m_2}\right)B=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\omega_p{}^2 + \frac{K_1+K}{m_1} & -\frac{K}{m_1} \\ -\frac{K}{m_2} & -\omega_p{}^2 + \frac{K_2+K}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

Le système (5.3) admet une solution si et seulement si$A$=$B = 0$ ou bien

$$\begin{vmatrix} -\omega_p{}^2 + \frac{K_1+K}{m_1} & -\frac{K}{m_1} \\ -\frac{K}{m_2} & -\omega_p{}^2 + \frac{K_2+K}{m_2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega_p{}^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_p{}^2 + \omega_1^2\omega_2^2(1 - k^2) = 0$$

Avec

$\omega_1^2 = \frac{K_1}{m_1} \omega_2^2 = \frac{K_2}{m_2}$ et $k = \frac{K^2}{(K_1+K)(K_2+K)}$

Où k est le coefficient de couplage.

Les deux pulsations propres sont

$$\omega_{p1=}^2 \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \frac{1\sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 4k\omega_1^2\omega_2^2}}{2}$$

$$\omega_{p2=}^2 \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \frac{1\sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 4k\omega_1^2\omega_2^2}}{2}$$

Supposons $K = K_1 = K_2$ et m =$m_1 = m_2$ pour simplifier les calcules ; donc le système d'équations devient :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Donc les pulsations propres sont

$$x_1(t) = A\cos(\omega_p t + \varphi)$$

Et

$$x_2(t) = Bcos\left(\omega_p t + \varphi\right)$$

On obtient dans le système (5.4)

$$\begin{cases}(-m\omega_p^2+2K)A-KB=0\\(-m\omega_p^2+2K)B-KA=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-m\omega_p^2+2K & -K\\ -K & -m\omega_p^2+2K\end{vmatrix}=0$$

$$\left(-m\omega_p^2+2K\right)^2-K^2=0\Rightarrow\begin{cases}3K-m\omega_p^2=0\\ K-m\omega_p^2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\omega_{p1}=\sqrt{\dfrac{K}{m}}\\[2ex]\omega_{p2}=\sqrt{\dfrac{3K}{m}}\end{cases}$$

Alors les solutions générales sont :

$$\begin{cases}x_1(t)=A_1\cos(\omega_{p1}t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_{p2}t+\varphi_2)\\x_2(t)=B_1\cos(\omega_{p1}t+\varphi_1)+B_2\cos(\omega_{p2}t+\varphi_2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1(t)=A_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{K}{m}}t+\varphi_1\right)+A_2\cos\left(\sqrt{\dfrac{3K}{m}}t+\varphi_2\right)\\[2ex]x_2(t)=B_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{K}{m}}t+\varphi_1\right)+B_2\cos\left(\sqrt{\dfrac{3K}{m}}t+\varphi_2\right)\end{cases}$$

Supposons que les deux masses oscillent avec le même battement ω_{p1} puis ω_{p2}

1er cas ω=$\boldsymbol{\omega_{p1}}$

$$\begin{cases}x_1(t)=A_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{K}{m}}t+\varphi_1\right)\\[2ex]x_2(t)=B_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{K}{m}}t+\varphi_1\right)\end{cases}$$

Où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont les solutions de des équations différentielle

$$\begin{bmatrix}-m\omega_{p1}^2+2K & -K\\ -K & -m\omega_{p1}^2+2K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\B_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$\left(-m\omega_{p1}^2 + 2K\right)A_1 - KB_1 = 0$

Et

$-KA_1 + \left(-m\omega_{p1}^2 + 2K\right)B_1 = 0$

Donc :$\frac{A_1}{B_1} = \frac{-K}{-m\omega_{p1}^2+2K}$ et$\frac{A_1}{B_1} = \frac{-m\omega_{p1}^2+2K}{-K}$

Alors :$\frac{A_1}{B_1} = 1 \Rightarrow A_1 = B_1$ (x_1 et x_2 sont en phase)

1er cas ω=ω_{p2}

$$\begin{cases} x_1(t) = A_2\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}t + \varphi_2\right) \\ x_2(t) = B_2\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} -m\omega_{p2}^2 + 2K & -K \\ -K & -m\omega_{p2}^2 + 2K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

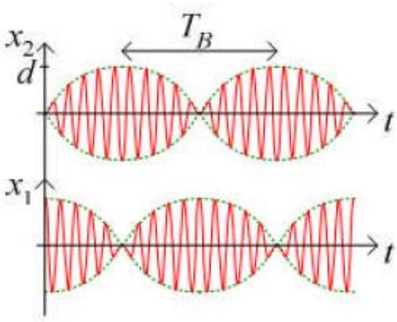
$\Rightarrow A_2 = -B_2$(x_1 et x_2Sonten opposition de phase)

Alors :

$$x_1(t) = A_1\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi_1\right) + A_2\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}t + \varphi_2\right)$$
$$x_2(t) = A_1\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi_1\right) - A_2\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}t + \varphi_2\right)$$

On trouveA_1,A_2,$\varphi_1$et φ_2 à partir des conditions initiales.

Le phénomène étudié est le battement :



Systèmes à deux degrés de liberté

Soit une force extérieure appliquée au premier sous-système ; cette force à la force suivante:

Les nouvelles équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = f(t) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K)x_1 - Kx_2 = f(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + (K_2 + K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

Les solutions particulières ont la forme

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 e^{i(\omega_p t + \varphi)} \\ x_2(t) = A_2 e^{i(\omega_p t + \varphi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\omega_p^2 e^{i(\omega_p t + \varphi)} \\ \ddot{x}_2(t) = -\omega_p^2 e^{i(\omega_p t + \varphi)} \end{cases}$$

En remplaçons les solutions dans le système différentiel on obtient

$$\begin{cases} (-m\omega_p^2 + 2K)A_1 e^{i\varphi} - KA_2 e^{i\varphi} = f_0 \\ (-m\omega_p^2 + 2K)A_2 e^{i\varphi} - KA_1 e^{i\varphi} = O \end{cases}$$

Les modules des amplitudes sont

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} f_0 & -K \\ 0 & -m\omega_p^2 + 2K \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m\omega_p^2 + 2K & -K \\ -K & -m\omega_p^2 + 2K \end{vmatrix}} = \dfrac{\frac{f_0}{m}(-\omega^2 + \frac{K}{m})}{(\omega^2 - \omega_{1p}^2)(\omega^2 - \omega_{2p}^2)} \\ A_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} -m\omega_p^2 + 2K & f_0 \\ -K & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m\omega_p^2 + 2K & -K \\ -K & -m\omega_p^2 + 2K \end{vmatrix}} = \dfrac{\frac{f_0 K}{m^2}}{(\omega^2 - \omega_{1p}^2)(\omega^2 - \omega_{2p}^2)} \end{cases}$$

Les phénomènes étudiés sont

- La résonance $\begin{cases} A_1 \to \infty \\ A_2 \to \infty \end{cases}$ quand $\begin{cases} \omega \to \omega_{1p} \\ \omega \to \omega_{2p} \end{cases}$

- Anti-résonance $\begin{cases} A_1 \to 0 \\ A_2 \to constante \end{cases}$ quand $\omega \to \frac{K}{m}$