Chapitre 4 : Systèmes linéaire forcés à un degré de liberté.

4.1.Force d'excitation

On définit une oscillation forcée, tout système en mouvement sous l'action d'une forceextérieure et on appelle cette force la force d'excitation.

4.2. Equation deLagrange des systèmes forcés

Si en plus du frottement $f=-\alpha\dot{q}$, il existe une force d'excitation externe (t), l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=F(t) \qquad \textbf{(4.1)}$$

Donc :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}=F(t)$ (mouvement de translation)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=M(t)$ (mouvement de rotation)

avec : $M(t)$ est le moment de la force F(t)

4.3. Equation dumouvement des systèmes forcés

On définit l'équation du mouvement forcé en présence de la force de frottement comme suit :

$$\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_0^2 q=F(t) \qquad \textbf{(4.2)}$$

où : $F(t)$est appelée la fonction d'excitation extérieure. Cette équation est linéaire de second ordre non homogène à coefficients constant.

4.4.Résolution de l'équation différentielle du mouvement

La solution *q(t)* de l'équation différentielle qui présente la réponse du système à la force extérieure, est la somme de deux thermes :

$$q(t)=q_g(t)+q_p(t) \qquad \textbf{(4.3)}$$

Où $q_g(t)$et $q_p(t)$représentent respectivement la solution générale la solution particulière.

- $q_g(t)$ est la solution **(transitoire)** de l'équation homogène (sans F). Elle est dite transitoire car elle s'éteint au cours du temps

- $q_P(t)$ est la solution **(permanente)** de l'équation non homogène (avec). Elle est appelée permanente car elle dure tout au long du mouvement.

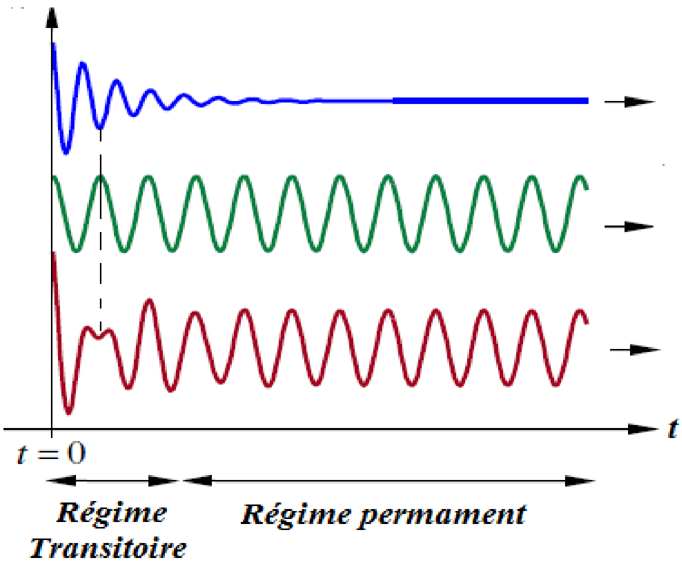


Fig. Représentation de la solution générale et la solution particulière.

Pour une excitation sinusoïdale de type

$$F(t)=f_0\cos\omega t=f_0 e^{j\omega t}$$

La solution particulière à la forme suivante

$$q(t)=q_p(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

Où A est l'amplitude, φ le déphasage de la solution totale.

ou bien q(t) s'écrit sous la forme complexe suivante

$$q(t)=q_p(t)= Ae^{j(\omega t+\varphi)}$$

On remplace dans l'équation différentielle du mouvement

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = F(t)$$

On a $\quad \dot{q} = Aj\omega e^{j(\omega t+\varphi)}$

Et $\ddot{q} = -A\omega^2 e^{j(\omega t+\varphi)}$

Donc : $-A\omega^2 e^{j(\omega t+\varphi)} + 2\delta\, Aj\omega e^{j(\omega t+\varphi)} + \omega_0^2\, Ae^{j(\omega t+\varphi)} = f_0 e^{j\omega t}$

Par comparaison des deux membres de l'équation on obtient

$$|A| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Et $\varphi = Arctg\,\frac{2\delta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$

Exemple

Soit une force d'excitation de la forme $F(t)= f_0\cos\omega t$ appliquée sur le système masse ressort.

L'équation du mouvement suivant la formule de Lagrange est donnée par

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F(t)}$$

Avec :L=T-U

L'énergie cinétique de la masse est $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

L'énergie potentielle du ressort est $U=\frac{1}{2}kx^2$

Donc $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$

Et$\frac{\partial L}{\partial x} = kx$

L'équation du mouvement est

$$m\ddot{x} + kx = f_0\cos\omega t$$

Donc

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m}\cos\omega t \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m}\cos\omega t$$

Où l'équation homogène $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$a la solution $x_g(t) = A_1 cosw_0 t + A_2 cosw_0 t$

D'autre part $\omega \neq \omega_0$

Alors la solutionparticulière de l'équation non homogène a la forme suivante :

$$x_p(t) = C_1 cosw\ \ t + C_2 sinw\ \ t$$

$$\dot{x}_p(t) = -c_1\omega sin\omega t + C_2\omega cos\omega t$$

$$\ddot{x}_p(t) = -c_1\omega^2 cos\omega t - C_2\omega^2 sin\omega t$$

On remplace dans l'équation différentielle on obtient :

$$C_1 = \frac{\frac{f_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$C_2 = 0$$

Alors $x_p(t) = \frac{\frac{f_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} cos\omega t$

On définit la déflexion statique de la masse sous une force d'excitation par le facteur suivant

$$\delta_{st} = \frac{f_0}{k}$$

Donc on peut écrit la solution de l'équation différentielle du mouvement sout la forme suivante :

$x_p(t) = \frac{\delta_{st}}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2} cos\omega t$

4.5.Facteur d'amplification :

Le facteur d'amplification est donné par le rapport $\frac{A}{\delta_{st}}$

Avec : $A = \frac{\delta_{st}}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$

Donc : $\frac{A}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$

On distingue trois cas suivant la valeur de $\frac{A}{\delta_{st}}$

- $\frac{A}{\delta_{st}} > 0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} < 1 \Rightarrow x(t) et\ f(t)$ sont en phase
- $\frac{A}{\delta_{st}} < 0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} > 1 \Rightarrow x(t) et\ f(t)$ sont en déphasage
- $\frac{A}{\delta_{st}} \rightarrow \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow$ la résonance

4.6. Pulsation de la résonance :

La pulsation d'excitation ω pour laquelle l'amplitude A atteint son maximum est appelée **pulsation de résonance** ω_r. A est maximale lorsque $\frac{\partial A}{\partial \omega}$=0

$\frac{\partial A}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\delta^2\omega^2}} = \frac{f_0(4\omega(\omega^2-\omega_0^2)+8\delta^2\omega)}{2\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\delta^2\omega^2}}$

$\frac{\partial A}{\partial \omega}=0 \Rightarrow f_0(4\omega(\omega^2-\omega_0^2)+8\delta^2\omega)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega \equiv \omega_r = 0 \\ ou \quad \omega \equiv \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \end{cases}$$

Donc l'amplitude maximale est

$$A_{max} = \frac{f_0}{\sqrt{4\delta^2\omega^2 - 4\delta^4}}$$

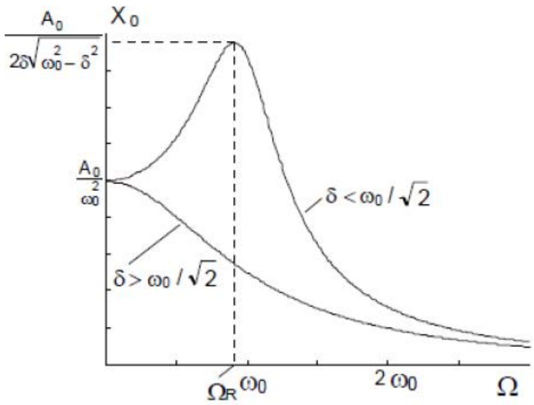
Pour qu'il y ait résonnance il faut que :

$$\omega_0^2 - 2\delta^2 > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$$

$$\Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cà dire si le facteur de qualité $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ⇒Amortissment faible

La variation de l'amplitude A et le déphasage φ sont présentées dans les figures suivantes



ω

Fig.. Amplitude en fonction de ω

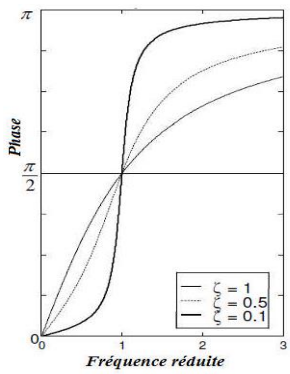
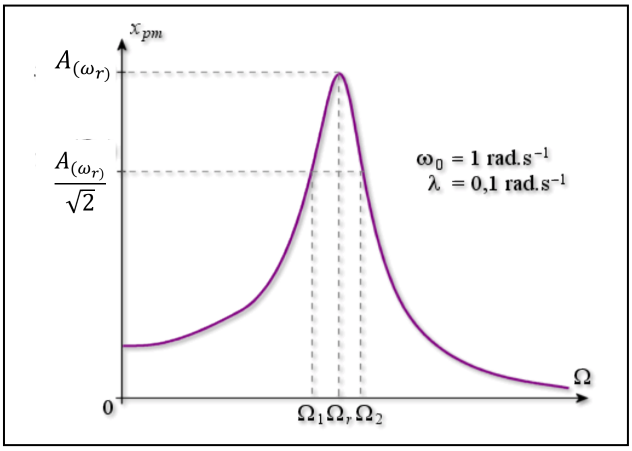


Fig..Déphasage en fonction de ω

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale de pulsation ω variable et dans le cas où $\delta<\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, on définit la **bande passante** en pulsation de l'oscillateur par l'intervalle :$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ (avec $\omega_2>\omega_1$)

où les pulsations ω_1 et ω_2 correspondent aux amplitudes A(ω_1) et A(ω_2) telles que

A (ω_1)=A (ω_2)=$\frac{A(\omega_r)}{\sqrt{2}}$



Alors la bande passante est donnée par :

$$B = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta$$

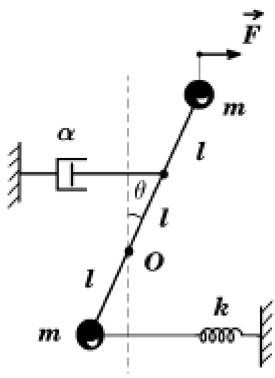
4.7. Le facteur de qualité

Le facteur de qualité est défini par le rapport de la pulsation propre à la bande passante

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

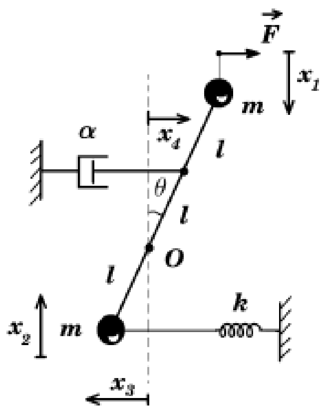
Exemple :

Le système ¸ci-contre est forcé à osciller autour de la verticale, qui est la position d'équilibre, par uneforce sinusoïdale F qui restehorizontale lors du mouvement. Elle est donnée par$F = F_0 cos\omega t$ et lesens positif est choisi vers ladroite. Le coeffic



Onsuppose que le système oscille par des faibles angles.
1. Exprimer et simplifier l'expression de l'énergie potentielleU.
2. Donner l'expression de l'énergie cinétique T dusystème.
3. Donner l'expression du Lagrangien du système etdéduire l'équation du mouvement.
4. Donner la solution permanente. Préciser son amplitudeet sa phase.

Réponse :



L'énergie potentielle du système est donnée par :

$$u = \frac{1}{2}K(x_3 + x_0)^2 + mgx_2 - mgx_1$$

Où

$$x_1 \approx l\theta^2$$

$x_2 \approx \frac{1}{2}l\theta^2$

$x_3 \approx -l\theta$

Donc :

$u = \frac{1}{2}K(x_0 - l\theta)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 - mgl\theta^2$

$\Rightarrow$

$u = \frac{1}{2}(Kl - mg)l\theta^2 - Klx_0\theta + \frac{1}{2}Kx_0{}^2$

A l'équilibre $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow (Kl - mg)l\theta - Klx_0 = 0$

Pour $\theta = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

Alors $u = \frac{1}{2}(Kl - mg)l\theta^2$

Et l'énergie cinétique est

$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(ml^2 + m(2l)^2)\dot{\theta}^2 = \frac{5}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

Le lagrangien est :

L=T-U=$\frac{5}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(Kl - mg)l\theta^2$

Dans le cas de l'existence d'une force de frottement, la dissipation de l'énergie est donnée par :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}^2$$

D'autre part dans le cas de l'existence d'une force extérieure on ajoute le terme suivant à l'équation du mouvement :

$$F = F_0 cos\omega t$$

Alors l'équation différentielle du mouvement est la suivante :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = bcos\omega t$$

Tel que :$\delta = \frac{\alpha}{10m}\omega_0^2 = \frac{Kl-mg}{5l}$ et $b = \frac{-2F_0}{5ml}$

La solution particulière de l'équation précédente a la forme suivante :

$$x_p(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$$

Ou bien on utilise la notation complexe

$$x_p(t) = a\cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow X = ae^{j\omega t}$$

$$bcos\omega t \leftrightarrow be^{j\omega t}$$

Par remplacement dans l'équation différentielle on obtient

$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\delta\omega)$A=b$\Rightarrow$A=$\frac{b}{(\omega_0^2-\omega^2+2j\delta\omega}$

On peut écrire

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\delta\omega = ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2)^{\frac{1}{2}}e^{j\varphi}$$

Avec :$\varphi = arc\ tg\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$donc la solution X s'écrit :

$$X = \frac{b}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2)}e^{j(\omega t-\varphi)}$$

$$=\frac{\frac{-2F_0}{5ml}}{((\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2)}e^{j(\omega t-\varphi)}=\frac{\frac{2F_0}{5ml}}{((\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2)}e^{j(\omega t+\pi-\varphi)}$$

La solution particulière est donnée par la partie réelle de X

$$x_p(t)=a\cos(\omega t+\varphi)\begin{cases}a=\dfrac{\frac{2F_0}{5ml}}{((\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2)^{\frac{1}{2}}}\\ \varphi=\pi-arc\ tg\,\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\end{cases}$$