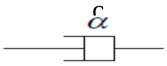
Chapitre 3: Systèmes libres amortis à un degré de liberté.

3.1.Introduction :

On parle du phénomène d'amortissement s'il existe des forces de frottements qui freinent le mouvement du système et donc résultent une dissipation de l'énergie. Alors le système perd son énergie sous l'effet de ces forces qui ne sont pas conservatives. Parmi ces forces on peut citer la force de frottement visqueuse, le frottement solide, la résistance de l'aire ……..

L'amortisseur est schématisé 

Les forces de frottement ont la forme suivante

$$f=-cv$$

avec :

c est le coefficient de frottement

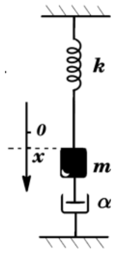
v est la vitesse

3.2. **Equation de Lagrange du système amorti**

Dans le cas du système amorti, il existe une force de frottement de la forme $f=-c\dot{q}$ et la perte d'énergie est défini par la fonction de dissipation $D=\frac{1}{2}c\dot{q}^2$ et l'équation du mouvement dans le cas d'un système libre amortie est :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=0} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Exemple :



Dans le cas du système masse ressort, on a :

L'énergie cinétique de la masse est $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

L'énergie potentielle du ressort est $U=\frac{1}{2}kx^2$

L'énergie de dissipation est $D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$

Donc $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}$

et $\frac{\partial L}{\partial x}=kx$

et $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}=\alpha\dot{x}$

L'équation du mouvement est

$$m\ddot{x} + kx + \alpha\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Qui est une équation différentielle linéaire du second ordre

Plus généralement, pour une coordonnée généralisée q elle s'écrit

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

3.3. Résolution de l'équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle linéaire du deuxième ordre

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

a l'équationcaractéristique suivante :

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Suivant la nature des racines de l'équation caractéristique, il existe trois typesd'amortissement.

$\grave{\Delta}$<0⇒ $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$régime faiblement amorti.

$\grave{\Delta}$=0⇒ $\delta^2 - \omega_0^2 = 0$ régime critique.

$\grave{\Delta}$>0⇒ $\delta^2 - \omega_0^2 > 0$ régime fortement amorti.

3.3.1.Régime faiblement amorti :

Si $\delta < \omega_0$la solution de l'équation différentielle du mouvement prendla forme : $\boldsymbol{q(t) = Ae^{-\delta t}cos(\omega_a t - \varphi)}$

Tel que $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ est le battement du système amorti.

On définit la période du système T appelé pseudo-période comme suit :

$$\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\omega_a}$$

3.3.2. Régime critique :

Si $\delta = \omega_0$le système n'effectue plus de mouvement oscillatoire et le système retourne vers l'équilibre sans aucune oscillationla solution de l'équation différentielle du mouvement prendla forme :

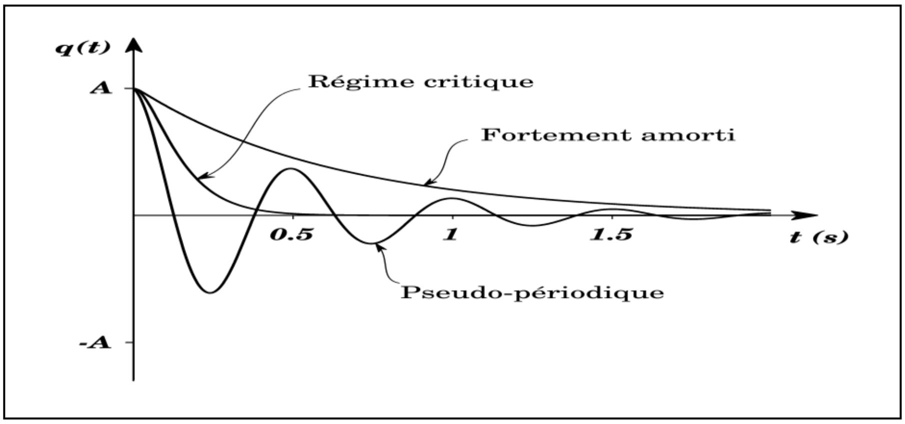
$$\boldsymbol{q(t) = e^{-\delta t}(A + Bt)}$$

On utilise les conditions initiales pour trouver les deux constantes A et B.

3.3.3. Régime fortement amorti :

Si $\delta > \omega_0$dans ce cas aussi le système n'effectue plus de mouvement oscillatoire et le système retourne directement vers l'équilibre sans aucune oscillationet solution de l'équation différentielle du mouvement prendla forme suivante :

$$\boldsymbol{q(t) = e^{-\delta t}(Ae^{-\sqrt{-\omega_0^2+\delta^2}\,t} + Be^{\sqrt{-\omega_0^2+\delta^2}\,t})}$$



Exemple :

On a trouvé l'équation différentielle du système masse ressort dans le cas du régime amorti est$\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

L'équation caractéristique est :

$$\boldsymbol{\lambda}^2 + \frac{\alpha}{m}\boldsymbol{\lambda} + \frac{k}{m} = 0$$

On a : Δ=$(\frac{\alpha}{m})^2 - 4\frac{k}{m}$

Suivant le signe de Δ il existe trois types de frottement

- Δ=0 $\Rightarrow (\frac{\alpha}{m})^2 = 4\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda \quad = -\frac{\alpha}{2m}$(cas du régime critique) et la solution de l'équation est :

$$x(t) = e^{\lambda t}(A + Bt)$$

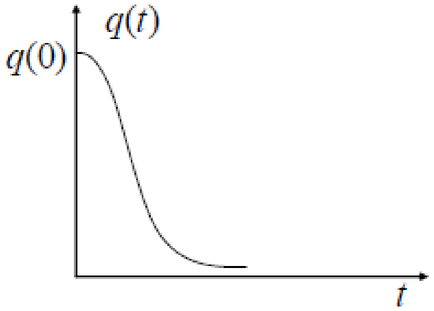


Fig.14. *Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime critique.*

- $\Delta>0 \Rightarrow (\frac{\alpha}{m})^2 > \frac{k}{m} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\alpha}{2m} - \sqrt{(\frac{\alpha}{2m})^2 - \frac{k}{m}}$ et

$\lambda_2 = -\frac{\alpha}{2m} - \sqrt{(\frac{\alpha}{2m})^2 - \frac{k}{m}}$ (Cas du régime fortement amortie)et la solution de l'équation est :$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

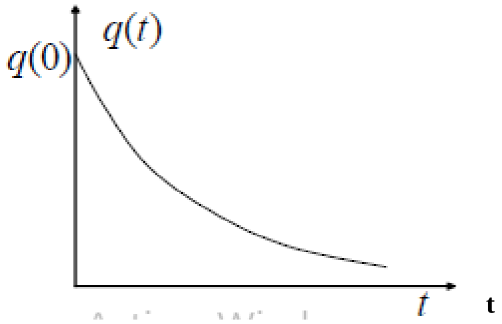


Fig.15.Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime fortement amorti (sur amorti)

- $\Delta<0 \Rightarrow (\frac{\alpha}{m})^2 > \frac{k}{m} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\alpha}{2m} - j\sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{\alpha}{2m})^2}$

  $\lambda_2 = -\frac{\alpha}{2m} + j\sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{\alpha}{2m})^2}$ (Cas du régime faiblement amorti)et la solution de l'équation est :

$$x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2m}}(A\cos\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}\, t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2})$$

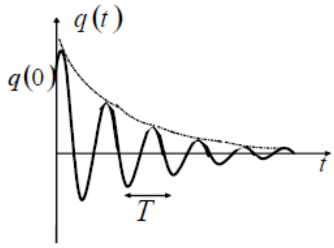


Fig.16. *Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime faiblement amorti*

3.4.Coefficient de frottement critique

C_C est la valeur de C correspondante àΔ=0 c'est-à-dire

$$(\frac{Cc}{m})^2 = 4\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow C_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_0$$

3.5.Le rapport d'amortissement

Le rapport d'amortissementest défini par $\varepsilon = \frac{c}{C_c}$

$$\Rightarrow \frac{C}{2m} = \varepsilon\omega_0$$

3.5.Le facteur de qualité

Le facteur de qualité est défini par

$$\boldsymbol{Q = 2\pi\frac{E}{\Delta E} = \frac{\omega_0}{2\delta}}$$

Avec El'énergie de l'oscillateur harmonique

ΔEest l'énergie dissipée pendant un cycle.

Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est grande. Or Q est d'autant plus grand, àω_0 donné, que l'amortissement est faible, d'où le nom de *facteur de qualité.*

3.6. La période du système pseudo-période

On définit la pulsation du système faiblement amorti comme suit:

$$\boldsymbol{\omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2}}$$

Donc la période du système est

$$\boldsymbol{T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}}$$

3.8. Le décrément logarithmique

On définit le décrément logarithmique qui représente la décroissance de l'amplitude à une seule période du système comme suit:

$$D = ln\ \frac{q(t)}{q(t+T)} = ln\frac{\boldsymbol{Ae^{-\delta t}cos(\omega_a t - \varphi)}}{\boldsymbol{Ae^{-\delta(t+T_a)}cos(\omega_a(t+T_a) - \varphi)}}$$

Avec :$\boldsymbol{\omega_a T_a = 2\pi}$

Donc : $\boldsymbol{cos(\omega_a(t+T_a) - \varphi) = cos(\omega_a t - \varphi)}$

Alors : D= $ln\frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T_a)}} = lne^{\delta T_a}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{D = \delta T_a}$$

3.9. L'énergie dissipée

A cause de la force de frottement,le système subit **une perte d'énergie totale** due **au travail des forces de frottement.**

$$dE_T(t)=-dw_{fr}$$

<u>Exemple1 :</u>

On définit un oscillateur amorti régi par l'équation différentielle suivante :

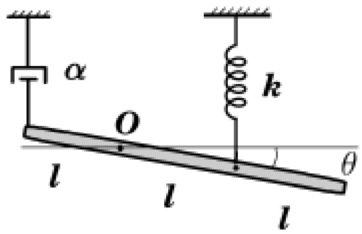
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Avec *m* est la masse du corps, *k* est le coefficient de rappel et *x* est le déplacement du corps. On lance le système avec une vitesse initiale v_0=25cm/s.

Donc on a : t=0, x=0 et $\dot{x} = v_0$

- Calculer la période propre du système,Sachant que : m=150g et k=3.8N/m.
- Montrer que si α=0.6kg/s, le corps a un mouvement oscillatoire amorti.
- Résoudre dans ce cas l'équation différentielle.
- Calculer le pseudo-période du mouvement.
- Calculer le temps $t_m$au bout duquel la première amplitude $x_m$est atteinte. En déduire x_m.
- Calculer la vitesse d'une pseudo-période.

<u>Exemple 2 :</u>



Dans le système précédent, labarre de masse m et de longueur3l peut tourner autour del'axe passant par O. On symbolisel'ensemble des frottementspar un amortisseur à frottementvisqueux de coefficientα.
A l'équilibre la tige est horizontale.
On écarte la tige de la verticaled'un angle suffisamment faible
pour admettre que sin Ө=Ө
1. Trouver l'équation différentielle du mouvement.
2. Quelle est la valeur que le coefficient de frottement α ne doit pas dépasser pour avoir un mouvement oscillatoire.
Calculer cette valeur si m = 1 kg et k = 1 N/m.
3. Supposant que prend la valeur calculée dans la questionprécédente.

Quelle est la nature du mouvement.
Donner l'équation horaire de ce mouvement Θ (t) ensachant qu'initialement Θ(0) = 5°et $\dot{\Theta}$ (0) = 0°/s.

Réponse :

1-L'équation du mouvement de ce système est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$$

Où L=T-U

Avec T= et U=

Donc l'équation du mouvement est

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{K}{m}\theta = 0$$

2-Pour qu'il y a un mouvement oscillatoire il faut queêtre dans le régime pseudo-périodique$\delta^2 - \omega_0^2 < 0$(faiblement amorti).

$(\frac{\alpha}{2m})^2 - \frac{K}{m} < 0 \Rightarrow \alpha < 2\sqrt{Km}$

Donc :α<2Ns /m

3-Lorsque α = 2 N.s/m on est dans le régime critique.

l'équation horaire du mouvement en sachant que$\delta = \frac{\alpha}{2m} = 1s^{-1}$

$$\theta(t) = e^{-t}(A_1 + A_2 t)$$

On détermine A_1 **et** A_2 à partir des conditions inisiales

$$\theta(0) = 5° \Rightarrow A_1 = 5°$$

$$\dot{\theta(t)} = -e^{-t}(A_1 + A_2 t) + A_2 e^{-t}$$

$$\dot{\theta}(0) = 0°/s \Rightarrow A_2 = 5°/s$$

Donc l'équation du mouvement s'écrit :

$$\theta(t) = e^{-t}(5 + 5t)$$