Chapitre 2:Systèmes Linéaires Libres à Un degré de Liberté.

2.1.Les oscillations libres

Un système oscillant en absence de toute force **d'excitation**, est appelé oscillateur libre. Le nombre des grandeurs indépendantes intervenant dans le mouvement est appelée degré de liberté.

On appelle oscillateur **harmonique** dès qu'il soit écarté de sa position d'équilibre d'une distance x (ou angle θ), est soumis à une force de rappel opposée et proportionnelle à l'écartement x (ou θ) :

$F = -Cx$.

2.2.Oscillateur linéaire

Le mouvement vibratoire est dit linéaire s'il est régi par une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2\, q = 0 \qquad (2.1)$$

2.3.Conditions d'équilibre

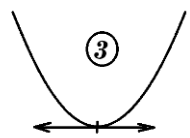
La condition d'équilibreest F=0.Si l'équilibre est à q=q_0 on écrit $F\big]_{q=q_0}$ =0

Pour une force dérivée d'un potentiel ($-\frac{\partial U}{\partial q}$),la condition d'équilibre s'écrit :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right]_{q=q_0} > 0$$

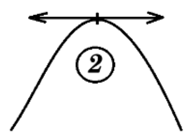
La condition de stabilité (l'équilibre est **stable** si, le système une fois écarté de sa position d'équilibre, il retourne a son équilibre) est donnée par

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$$



L'équilibre d'un système est instable si le système ne regagne pas son équilibre lors d'un écartement, c.-à-d. si C<0. La condition d'équilibre **instable** s'écrit donc

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0$$



2.4 .L'énergie d'un oscillateur harmonique

L'énergie d'un oscillateur harmonique est la somme de ses énergies cinétiques et potentielles : $E=T+U$

- L'énergie cinétique de translation d'un corps de masse m et de vitesse v est $\boldsymbol{T translation=\frac{1}{2} mv^2}$

- L'énergie cinétique de rotation d'un Corps de moment d'inertie $I_\Delta$autour d'un axe Δ et de vitesse angulaire θ est

$$\boldsymbol{Trotation =\frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2}$$

- L'énergie potentielle d'une masse m dans un champ gravitationnelle constant g est : $\boldsymbol{U=mgh}$ (ou bien $\boldsymbol{U=-mgh}$ dans le casd'une descente d'une hauteur h)

- L'énergie potentielle d'un ressort de raideur k lors d'une déformation $x$est :

$$\boldsymbol{Uressort=\frac{1}{2} Kx^2}$$

- L'énergie potentielle d'un ressort de torsion de raideur k lors d'une déformation θ est $\boldsymbol{Uressort=\frac{1}{2} K}\Theta^2$

Remarque :
L'inertie d'un corps dépond de ses dimensions, de sa masse et de son axe de rotation, la figure présente l'inertie de différents corps

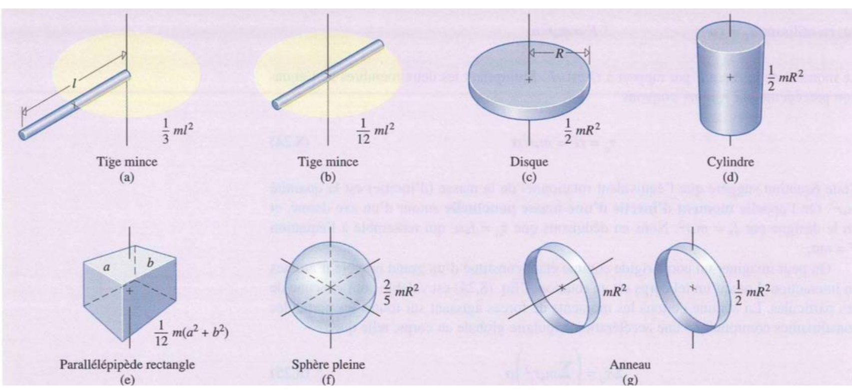


Fig.10. Moment d'inertie de différentes formes

2.5.Théorème de Huygens

Le moment d'inertie varie suivant l'axe de rotation, si $\mathbf{I_0}$ est l'inertie d'un corps de masse **m** lorsque l'axe de rotation passe par le centre de la masse du corps et $\mathbf{I_\Delta}$ est le moment d'inertie si l'axe de rotation est **Δ** avec une distance d entre le centre de la masse et l'axe de rotation, le théorème de Huygens donne l'inertie par la formule suivante :

$$\mathbf{I_\Delta = I_0 + md^2}$$

2.6.Equation du mouvement d'un oscillateur harmonique

*2.7.1.**Exemple du système masse ressort***

On applique les lois de PFD on obtient :

$$-kx_0+mg=0$$

et

$$-k(x_0+x)+mg=m\ddot{x}$$

alors

$$m\ddot{x}+kx=0$$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

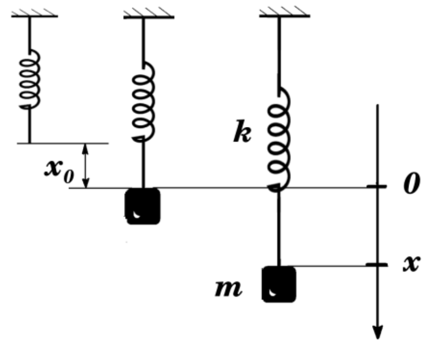


Fig.12. Oscillateur harmonique

(masse ressort)

D'autre part on peut trouver l'équation du mouvement par la formule de Lagrange

Formule de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \qquad \textbf{(2.2)}$$

Tel que

q est la coordonnée généralisée qui décrit le mouvement du système(x, y,z,Ө…….) et le nombre de degré de liberté du mouvement estle nombre de coordonnées généralisées indépendants.

L=T-U est le Lagrangien du système égale à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentiel

Test l’énergie cinétique du système

U est l’énergie potentiel du système

Pour l’exemple système masseressort on a

$$U=\frac{1}{2}kx^2 \quad \text{et } T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Alors l’équation du mouvement d’un système libre non amortie par la formule de Lagrange est $m\ddot{x}+kx=0$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

Qui est bien l’équation obtenue à l’aide du principe fondamentale de la dynamique puis à l’aide de l’équation de conservation.

2.7.Solution de l’équation du mouvement

L’équation différentielle de l’oscillateur harmonique admet la solution sinusoïdale suivante :

$$\boldsymbol{x = A \sin(\omega_0 t + \varphi)} \qquad \textbf{(2.3)}$$

L’amplitude**A** et la phase φ dépendent des conditions initiales et pour trouver ses valeurs,on a besoin de deux conditions initiales (généralement $q(t_0)$ et $\dot{q}$ (t_0)). On peut donc varier ces constantes en variant les conditions initiales.

$$\begin{cases} q(t=0)=q_0 \\ \dot{q}(t=0)=\dot{q}_0 \end{cases}$$

C’est-à–dire

$$\begin{cases} A\sin\varphi=q_0 \\ -A\omega_0\cos\varphi=\dot{q}_0 \end{cases}$$

Pour calculer la constante A, on metq_0 *et* $\dot{q}_0$ au carré puis on les additionne terme par terme, on obtient :

$$(\frac{q_0}{A})^2+(\frac{\dot{q}_0}{A\omega_0})^2=1 \Rightarrow (A\omega_0)^2=(q_0\omega_0)^2+\dot{q}_0{}^2$$

Donc : $A=\sqrt{\frac{(q_0\omega_0)^2+\dot{q}_0{}^2}{\omega_0{}^2}}$

Et :tg $\varphi = -\frac{q_0}{\dot{q}_0\omega_0} \Rightarrow \varphi = arc\ tg(-\frac{q_0}{\dot{q}_0\omega_0})$

2.8.La pulsation propre (le battement naturel)

On appelle pulsation propre ω_0 parce qu'elle ne dépend que des grandeurs propres de l'oscillateur(ω_0= $\sqrt{\frac{k}{m}}$ *pour* le système masse ressort)

Remarques

- L'énergie totale d'un système E=T+U est constante ($\frac{dE}{dt} = 0$ onditquelesystèmeestconservatif)
- La force de rappel d'un ressort *F=-kx* est reliée par l'énergie potentielle comme suivant :
$$F = -kx = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -\frac{\partial U}{\partial x}$$
- L'oscillateur harmonique, quel que soit sa nature,est un système conservatif.

2.9. L'énergie totale d'un oscillateur harmonique :

On a vu précédemment que la solution de l'équation différentielle du mouvement a la forme $x(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)$.

Donc:$\dot{x}(t)=A\ \omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$

L'énergie totale du système masse ressort est :E=T+U

Avec : U=$\frac{1}{2}kx^2$ et $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Alors :E=$\frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

D'autre part on a : $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega_0^2$

On remplace par la valeur de $k = m\omega_0^2$,on obtient :

E=$\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

E=$\frac{1}{2}kA^2$

2.10.Variation de l'énergie d'un système vibratoire

Dans un mouvement vibratoire, l'énergie totale est constante. L'énergie se transforme d'une énergie cinétique à une énergie potentielle.Quand l'énergie cinétique diminue, l'énergie potentielle augmente et vis versa. Cette propriété est appelée conservation de l'énergie totale du système. La variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de déplacement x est présentée sur la figure 11.

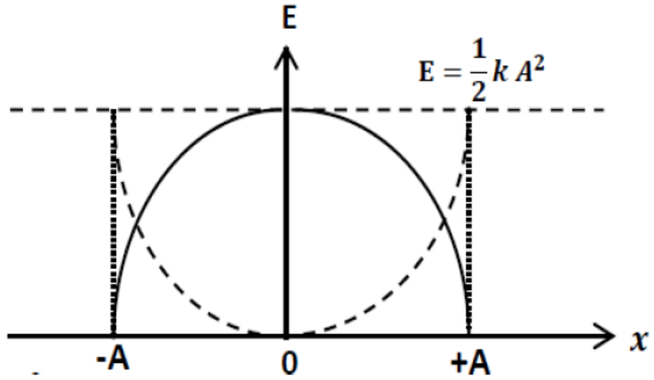
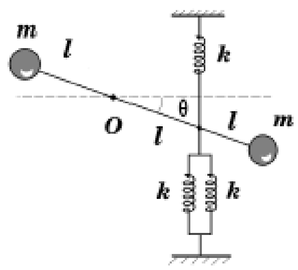


Fig.11. Variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de *x*

Exemple

Soit le système suivant



1-Quelle est l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du sy

2-Quel est le lagrangien du système.

3-Trouver l'équation différentielle du mouvement.

4-Aux conditions initiales Θ(0)=0 et $\dot{\theta}(0) = 1$,

trouver l'amplitude du mouvement et le déphasage

avec $K=10^{-4}$N/met m=1Kg

Réponse

Le système équivalent est le suivant : $k_{eq} = 3k$

$$u = \frac{3}{2}K(x_0 + x_1)^2 - mgx_2 + mgx_3$$

$$x_1 = -l\,sin\theta = -l\theta$$

$$x_2 = -2l\,sin\theta = -2l\theta$$
$$x_3 = -l\,sin\theta = -l\theta$$

En remplaçant l'expression de ces coordonnées dans U :

$$u = \frac{3}{2}K(x_0 - l\theta)^2 + 2mgl\theta - mgl\theta$$
$$u = \frac{3}{2}K(l^2\theta^2) + (mg - 3Kx_0)l\theta + \frac{3}{2}Kx_0^2$$

A l'équilibre$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 3Kl^2\theta + (mg - 3Kx_0)l = 0$$

Mais aussi, à'l'équilibre θ=0, donc la condition d'équilibre devient :

$$(mg - 3Kx_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{3K}$$
$$u = \frac{3}{2}K(l^2\theta^2) + \frac{3}{2}Kx_0^2$$

L'énergie cinétique du système en rotation est :

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(ml^2 + m(2l)^2)\dot{\theta}^2$$
$$\Rightarrow T = \frac{5}{2}\, ml^2\dot{\theta}^2$$

Donc le Lagrangien du système est :

$L = \frac{5}{2}\, ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{3}{2}K(l^2\theta^2) - \frac{3}{2}Kx_0^2$

Et l'équation du mouvement est :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}}\left(\boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}}\right) - \boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial \theta}} = 5ml^2\ddot{\theta} + 3Kl^2\theta = 0$$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3K}{5m}\,\theta = 0$

Où la pulsation propre est :$\omega_0 = \sqrt{\frac{3K}{5m}}$