Chapitre1 :Généralités sur les vibrations

1.1. Définitions :

1.1.1.Définition du mouvement de vibration (oscillation)

Le mouvement oscillatoire est un mouvementde va-et-vient répétitif ,on peut cité des exemples de ce type de mouvement (le pondule simple, le circuit électrique oscillant,le système masse rossort…..)

- **Le pendule simple**

Composé par une masse attachéeà un fil écartée de sa position d'´equilibrepuis relâchée effectue un mouvement d'aller et retour qui se répète dans le temps.

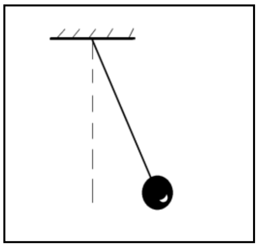


Fig1. Pendule simple

- **Circuit électrique oscillant**

Circuit linéaire contenant une résistance ***électrique*** *et* un condensateur (une capacité) et une bobine (une inductance) et pouvant fait des oscillations électriques.

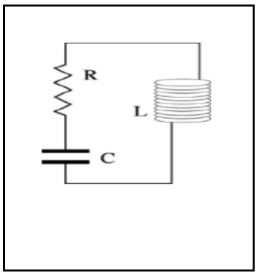


Fig2. Circuit électrique oscillant

- **Système masse-ressort**

Composé par une masse attachée à un ressort écartée de sa position d'équilibre puis relâchée effectue un mouvement et retour qui se répète dans le temps.
Des que le corps est écarté de la position d'équilibre
Force apparait pour tenter de la ramener vers l'équilibre.
Cette force est dite force de rappel.

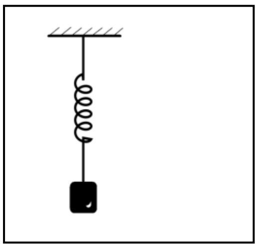


Fig3.système masse ressort

1.1.2.Mouvement périodique

Le mouvement périodique est un mouvement oscillatoire qui se fait d'une manière identique. On dit qu'un mouvement est périodique si après un temps T nécessaire pour effectuer une oscillation complète autour de la position d'´equilibre et on appelle le temps T la période mesurée en secondes s.

Le nombre de répétitions par seconde est appelé **fréquence** (notée f, mesurée en **Hertz** ou s^{-1}.) Elle est reliée à la période par

$$f=\frac{1}{T} \qquad \textbf{(1.1)}$$

La pulsation est définie par le nombre de tours par seconde (notée ω, mesurée en **rad/s**.)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Mathématiquement, la périodicité s'exprime par $x(t+T)=x(t)$.

Exemple :

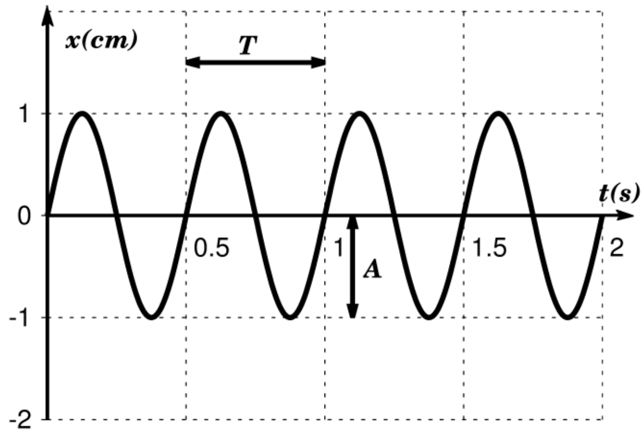


Fig.4 Mouvement périodique.

Exemple :

Soient les fonctions périodiques f(t) dont les graphes sont représentés sur les Figures (5), (6) et (7).

1. Déduire la période, la fréquence et la pulsation et l'amplitude de chaque fonction.

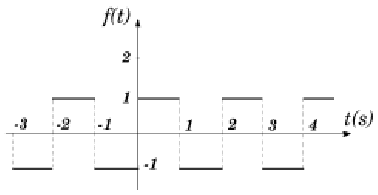


Fig.5

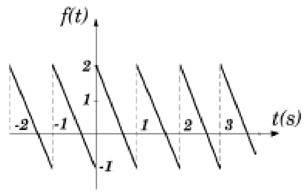


Fig.6

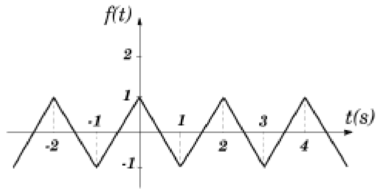


Fig.7

1.1.3. Mouvement sinusoïdal et Notation complexe

Une grandeur périodique est dite **Sinusoïdale** lorsqu'elle est de la forme $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ou bien $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$.

A est appelée **amplitude,** ω : la **pulsation,** φ : la **phase initiale**.
Pour faciliter les calculs, nous transformons les grandeurs sinusoïdales en des exponentielles qui sont plus simples à manipuler. On peut considérer le plan Oxy comme un plan complexe. Le point de coordonnées (x, y) correspond à un nombre complexez

$z = x + iy$ avec x=rcosθet y=rsinθ

cosθ+isinθ= $e^{j\theta}$avec $i^2=-1$

donc :

z= r(cos θ+ isin θ)=r $e^{i\theta}$ et de cette relation on peut même déduire que :

sin $\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$ et cos $\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

1.1.4. Superposition des grandeurs sinusoïdales de même pulsation

La superposition de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation ω est une grandeur sinusoïdale de pulsation ω.

Exemple : Soit les deux grandeurs sinusoïdales

$x_1(t)= a\cos(\omega t + \alpha)$et $x_2(t)= b\cos(\omega t+\beta)$.

La superposition de$x_1(t)$et$x_2(t)$ donne$x_3(t)$

$x_3(t)= x_1(t)+ x_2(t)= a\cos(\omega t + \alpha)+ b\cos(\omega t+\beta)$.

Supposons la fonction $y_3(t)=y_2(t)+y_1(t)$

Avec :$y_1(t) = a\sin(\omega t + \alpha)$et $y_2(t) = b\sin(\omega t + \beta)$

Alors :$x_3+iy_3=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)$

$=(a\,cos(\omega t+\alpha)+i\,a\,sin(\omega t+\alpha))+(b\,\sin(\omega t+\beta)+i\,b\,sin(\omega t+\beta))$

$=ae^{i(\omega t+\alpha)}+be^{i(\omega t+\beta)}$

$=(ae^{i\alpha)}+be^{i\beta})\,e^{i\omega t}=Ae^{i\omega t}$

Le nombre A = $ae^{i\alpha)}+be^{i\beta}$ est un nombre complexe constant qui a une norme

$|A|=\sqrt{AA^*}=\sqrt{(ae^{i\alpha}+be^{i\beta})(ae^{-i\alpha}+be^{-i\beta})}=\sqrt{a^2+b^2+abcos(\alpha-\beta)}$

et une phase ϕ définie par tg $\phi=\frac{Im(A)}{Re(A)}=\frac{asin\alpha+bsin\beta}{acos\alpha+bcos\beta}$

Donc:A=|A| $e^{j\phi}$

Enfin on arrive à $x_{3}=|A|\,cos(\omega t+\phi)$

1.1.5. La liaison des ressorts

1.1.5.1.Ressorts en parallèle

Soient deux ressorts $\boldsymbol{k_1}$ et $\boldsymbol{k_2}$, ont la même longueur à vide $\boldsymbol{l_0}$ et subissent le mêmeallongement $\boldsymbol{x}$.Quand on accrocha une m $\boldsymbol{m}$ à l'extrémité des deus ressorts.Le ressort équivalent de raid a le même allongement, à l'équilibre on a :

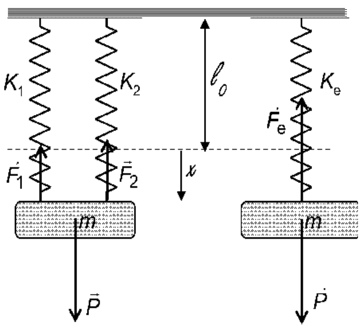


Fig.8. Ressorts en parallèle

$$\begin{cases} mg = k_1x + k_2x \\ mg = k_{eq}x \end{cases}$$

Alors $$k_{eq}=k_1+k_2$$

1.1.5.1.Ressorts en série

Soient deux ressorts $\boldsymbol{k_1}$ et $\boldsymbol{k_2}$,leurs allongement $\boldsymbol{x_1}$et $\boldsymbol{x_2}$ respectivement, le ressort équivalent de raideur k_{eq} à l'allongement $\boldsymbol{x}$= $\boldsymbol{x_1}$+ $\boldsymbol{x_2}$,tel que

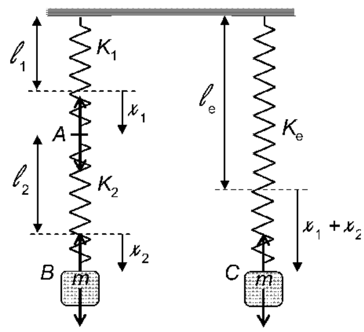


Fig.9. Ressorts en série

$$\begin{cases} \boldsymbol{k_1x_1=k_2x_2} \\ \boldsymbol{mg=k_2x_2} \\ \boldsymbol{mg}=k_{eq}(x_1+x_2) \end{cases}$$

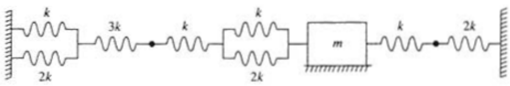
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\boldsymbol{k_2}}{\boldsymbol{k_1}} \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{k_2 x_2} = k_{eq}(x_1 + x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{k_2 x_2} = k_{eq}\left(\frac{\boldsymbol{k_2}}{\boldsymbol{k_1}} \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_2}\right)$$

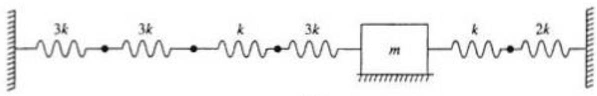
$$\Rightarrow k_{eq} = \frac{\boldsymbol{k_1 k_2}}{\boldsymbol{k_1 + k_2}} \text{ ou bien } \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{\boldsymbol{k_1}} + \frac{1}{\boldsymbol{k_2}}$$

Exemple :

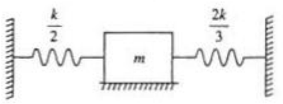
Trouver le ressort équivalent dans le système suivant



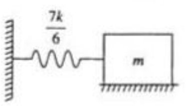
Réponse :



(a)



(b)



(c)

1.1.6.Masse équivalente et moment équivalent :

A partir de l'énergie cinétique totale du système mécanique, on peut trouver la masse équivalente et le moment équivalent du système comme suivant :

$$\begin{cases} T_{totale}(système) = \dfrac{1}{2}(masse\ équivalente)V^2 \\ T_{totale}(système) = \dfrac{1}{2}(moment\ équivalent)\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

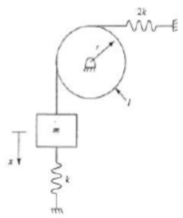
Tel que :

V est la vitesse linéaire

$\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire

Exemple :

Soit le système suivant, trouver la masse équivalente et le moment équivalent.



Réponse :

$$U = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} (2K) x^2 = \frac{1}{2} (3K) x^2 \rightarrow K_{eq} = 3K$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \, I (\frac{\dot{x}}{r})^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{r^2} \right) \dot{x}^2 \rightarrow m_{eq} = m + \frac{I}{r^2}$$