***Chapitre I***

# Rappel mathématique sur les nombres complexes NC

#### Introduction

Les nombres complexes prolongent l'ensemble des nombres réels. Se composant d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, ils se représentent par un point à deux coordonnées dans le plan, que l'on appelle alors plan complexe. Ils permettent, par exemple, de donner des solutions à l'équation *x²+1 = 0*.

Leurs applications sont nombreuses en électromagnétisme et en électronique, car leur *écriture trigonométrique* permet de simplifier la transcription des *phénomènes ondulatoires.*

#### Les différentes formes d'un nombre complexe

* + 1. La forme algébrique ou cartésienne

Un nombre complexe z a une écriture algébrique de la forme : *Z = x + j y* (x, y sont réels, j²=-1). Le premier terme Re(z) = x constitue sa partie réelle et le second sa partie imaginaire Im(z) = y. Dans le repère orthonormé direct (O ; I, J), z se représente par le point M(x ; y).

Le module r du nombre complexe z est la longueur OM : = |𝑍| = √𝑥² + 𝑦².

L'argument du nombre complexe non nul z est l'angle orienté On note : argZ = 𝜃.

* + 1. la forme trigonométrique et exponentielle

Si la représentation des nombres complexes sous la forme z = x + j y est très utile pour l'addition, elle l'est moins pour la multiplication. Il existe une autre représentation pour les nombres complexes qui est plus commode pour la multiplication. C'est ce qu'on appelle, la *forme trigonométrique* due à [*Moivre*](http://xavier.hubaut.info/coursmath/bio/moivre.htm) :

𝑍 = (𝑐𝑜𝑠𝜃 + j𝑠i𝑛𝜃)

Aussi, tout nombre complexe admet alors une troisième écriture : 𝑍 = 𝑟𝑒j𝜃 que l’on appelle

*forme exponentielle.*

#### le conjugué d'un nombre complexe

Le nombre complexe conjugué de *z = x + jy* est le complexe *z = x - jy*. Dans le plan complexe, si le point M a pour affixe z et M' pour affixe , alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

* Le produit d'un nombre complexe par son conjugué est un nombre réel égal au carré de leur module commun :

𝑧𝑧̅ = 𝑥2 + 𝑦2 = |𝑧|2

* Le conjugué de la somme est égal à la somme des conjugués :

si 𝑍 = 𝑥 + j𝑦 𝑒𝑡 𝑍′ = 𝑥′ + j𝑦′ alors̅𝑍̅̅+̅̅̅𝑍̅̅′ = 𝑍̅ + 𝑍̅′ = (𝑥+𝑥′) − j(𝑦 + 𝑦′).

* Le conjugué du produit est égal au produit des conjugués :

𝑍̅̅̅×̅̅̅𝑍̅̅′ = 𝑍̅ × 𝑍̅′ = (𝑥𝑥′ − 𝑦𝑦′) − j(𝑥′𝑦 + 𝑥𝑦′).

#### Opérations arithmétiques sur les NC

Soient deux nombres complexes 𝑍 = 𝑥 + j𝑦 𝑒𝑡 𝑍′ = 𝑥′ + j𝑦′ et (x ; y ; x' ; y' ).

* + 1. ***Égalité :*** Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties entières sont égales ainsi que leurs parties imaginaires : *x = x' et y = y'.*
		2. ***La somme :*** La partie réelle du complexe somme est la somme des parties réelles, et la partie imaginaire est la somme des parties imaginaires : 𝑍 + 𝑍′ = (𝑥 + 𝑥′) + j(𝑦 + 𝑦′)

***I.4.3 Le produit :*** 𝑍̅ × 𝑍̅′ = (𝑥𝑥′ − 𝑦𝑦′) + j(𝑥′𝑦 + 𝑥𝑦′).

Le module du complexe produit est le produit des modules : |𝑍𝑍′| = |𝑍| × |𝑍′| . L'argument du complexe produit est la somme des arguments : arg(Z × Z') = arg Z + arg Z'.

Soit pour la forme trigonométrique : 𝑍𝑍′ = 𝑟𝑟′(𝑐𝑜𝑠(𝜃 + 𝜃′) + j 𝑠i𝑛(𝜃 + 𝜃′)) .

* + 1. ***Le Quotient :*** Pour obtenir l'écriture algébrique du complexe quotient on multiplie numérateur et dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur.

Z = 𝑥+j𝑦

(𝑥+j𝑦)(𝑥𝘍−j𝑦′)

=

(𝑥𝑥𝘍+𝑦𝑦′)+j(𝑥𝘍𝑦−𝑥𝑦′)

=

Z′ 𝑥𝘍+j𝑦′

(𝑥𝘍+j𝑦′)(𝑥𝘍−j𝑦′)

𝑥²+𝑦²

Le module du quotient est le quotient des modules :

|Z | =

|Z| .

Z′ |Z′|

L'argument du quotient est la différence des arguments :𝑔 Z = 𝑎𝑟𝑔𝑍 − 𝑎𝑟𝑔𝑍′ (Z 0 et

Z′

Z' 0) .

Soit pour la forme trigonométrique : Z

Z𝘍

= 𝑟 (𝑐(𝜃 − 𝜃′) + j 𝑠i𝑛(𝜃 − 𝜃′))

𝑟′

* + 1. multiplication avec 𝑒j𝑎

𝐶̅ = 𝑐 𝑒j𝛾 correspond au vecteur 𝑂⃗⃗⃗⃗𝐶⃗→.

j

C’



C

ɣ

0

+1

𝑒j𝛼 𝐶̅ = 𝑐 𝑒j(𝛼+𝛾) correspond au vecteur 𝑂⃗⃗⃗⃗𝐶⃗→́.

La multiplication d’un nombre complexe avec ej𝖺 correspond à un décalage d’un angle  du vecteur représentatif dans le sens trigonométrique si 0 et dans le sens horaire si 0

#### Racine carrée d'un nombre complexe

Définition : soit Z un nombre complexe donné, on appelle racine carrée complexe de Z tout nombre complexe z, s'il existe tel que *z² = Z*

Le plus simple pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe *Z = a + jb* est de poser *z = x + jy* (ou x et y sont des réels) puis de résoudre le système d'équations à deux inconnues qui en résulte en effet :

𝑧2 = 𝑍 - {

𝑧2 = 𝑍

2

(𝑥 + j𝑦)2 = 𝑎 + j𝑏

- {

|𝑧|

2 2

= |𝑍|

𝑥2 + 𝑦2 = √𝑎2 + 𝑏2

𝑥2 − 𝑦2 = 𝑎

𝑥 − 𝑦

- {

+ 2j𝑥𝑦 = 𝑎 + j𝑏

- {

2𝑥𝑦 = 𝑏

𝑥2 + 𝑦2 = √𝑎2 + 𝑏2

𝑥2

+ 𝑦2

= √𝑎2

+ 𝑏2

***Exemple :*** on veut déterminer les racines carrées de *3 + 4j*

Réponse : on trouve deux racines carrées pour *3 + 4j : -2 - j* et *2 + j*

#### Formule de Moivre et formule d'Euler

* + 1. Formule de [Moivre](http://homeomath2.imingo.net/mathes.htm#Moivre)

𝑧1 = 𝑟1(𝑐𝑜𝑠(𝜃1) + j𝑠i𝑛(𝜃1)) 𝑒𝑡 𝑧2 = 𝑟2(𝑐𝑜𝑠(𝜃2) + j𝑠i𝑛(𝜃2))

𝑎𝑙𝑜𝑟𝑠 𝑧1𝑧2 = 𝑟1𝑟2(𝑐𝑜𝑠(𝜃1 + 𝜃2) + j𝑠i𝑛(𝜃1 + 𝜃2))

𝑧 = (𝑐𝑜(𝜃) + j𝑠i𝑛(𝜃)) 𝑒𝑡 𝑛 ∈ N 𝑎𝑙𝑜𝑟𝑠 𝑧𝑛 = 𝑟𝑛(𝑐𝑜𝑠(𝑛𝜃) + j𝑠i𝑛(𝑛𝜃))

I.6. 2 Formules d'[Euler](http://homeomath2.imingo.net/mathes.htm#Euler)

pour tout réel x on a : cos 𝑥 = 𝑒j𝑥+𝑒−j𝑥

2

 sin 𝑥 = 𝑒j𝑥−𝑒−j𝑥

2j

#### Application à l’électricité des NC.

* + 1. Nombre complexe représentatif efficace d’une grandeur sinusoïdale.

On peut remarquer que les fonctions trigonométriques ne sont que les projections du cercle trigonométrique sur les axes réels ou complexes.

Appelons *intensité complexe* le vecteur𝐼. Lorsque 𝐼̅ parcourt le cercle trigonométrique, alors la

projection de 𝐼̅ sur l’axe des abscisses décrit l’intensité réelle *i*(*t*).

j

I’

t



0

+1

|⃗𝑂⃗⃗⃗𝐼→| = 𝐼𝑚𝑎𝑥

Le vecteur ⃗𝑂⃗⃗⃗𝐼→ forme avec l’axe des abscisses un angle de φ. Ce vecteur tourne dans le sens trigonométrique avec la fréquence . Ce vecteur représente un nombre complexe (intensité complexe) 𝐼̅ = 𝐼𝑚 . 𝑒j(𝜔𝑡+𝜑),

Il sera souvent *plus commode* de manipuler l’intensité complexe𝐼̅ = 𝐼𝑚 . 𝑒j(𝜔𝑡+𝜑), plutôt que l’intensité réelle i(𝑡) = 𝐼𝑚𝑎𝑥 𝑐𝑜𝑠(𝜔𝑡 + 𝜑).

* + 1. Grandeur sinusoïdale

A chaque grandeur sinusoïdale écrite sous la forme générale (𝑡) = 𝑈𝑚𝑎𝑥 𝑠i𝑛(𝜔 𝑡 + 𝜑) est associé le nombre complexe 𝑈̅

L’amplitude (*Umax*) correspond au module du nombre complexe 𝑈̅ et 𝜔 𝑡 + 𝜑 correspond à l’argument.

𝑈̅̅̅𝑀̅ = 𝑈𝑚𝑎𝑥𝑒j(𝜔 𝑡+ 𝜑)

* + - * Dans l’analyse des circuits électriques C.E. on est intéressé que de la valeur efficace

Ueff

= Umax.

√2

* + - * Toutes les grandeurs d’un circuit électrique varient avec la même fréquence.
			* Au lieu d’utiliser ̅𝑈̅̅𝑀̅ on représente U par 𝑈̅ = 𝑈𝑒j𝜑 c’est le nombre complexe efficace.
		1. Nombre complexe représentatif de 𝑑i

𝑑𝑡

***et de*** ∫ i𝑑𝑡

i(𝑡) = 𝐼𝑚𝑎𝑥 𝑠i𝑛(𝜔𝑡 + 𝜑) alors le nombre complexe efficace est 𝐼̅ = 𝐼𝑚𝑎𝑥 𝑒j𝜑

* + - * 𝑑i = 𝜔𝐼

𝑐𝑜𝑠(𝜔𝑡 + 𝜑) = 𝜔𝐼

𝜋 alors le nombre complexe

𝑑𝑡

𝑚𝑎𝑥

𝑚𝑎𝑥 𝑠i𝑛 (𝜔𝑡 + 𝜑 + 2)

𝜋 𝜋

𝑑i

efficace est 𝜔𝐼𝑚𝑎𝑥 𝑒j(𝜑+2) = 𝜔𝐼𝑚𝑎𝑥 𝑒j𝜑𝑒j2 = j𝜔𝐼𝑚𝑎𝑥 𝑒j𝜑 alors

j𝑚 **est l’opérateur dérivateur** 𝑑i → j𝑚𝐼̅

𝑑𝑡

𝑑𝑡

= j𝜔𝐼

* + - * ∫ i𝑑𝑡 = ∫ 𝐼𝑚𝑎𝑥

𝑠i(𝜔𝑡 + 𝜑) 𝑑𝑡 = − 𝐼𝑚𝑎𝑥

𝜔

𝑐𝑜𝑠(𝜔𝑡 + 𝜑) = 𝐼𝑚𝑎𝑥

𝜔

𝑠i𝑛 (𝜔𝑡 + 𝜑 − ). alors

2

𝜋

𝐼 𝜋 𝐼

𝜋 𝐼

le nombre complexe efficace est

 𝑚𝑎

𝜔

𝑒j(𝜑−2) = 𝑚𝑎𝑥

𝜔

𝑒j𝜑𝑒−j2 = −j 𝑚𝑎𝑥

𝜔

𝑒j𝜑 alors

𝑑i = 1 𝐼

𝑑𝑡 j𝜔

1

j𝑚

***est l’opérateur intégrateur*** ∫ i𝑑𝑡 → 1 𝐼̅

j𝑚

* + 1. Notion d’impédance

Il est donc possible, et souvent préférable, de représenter la tension et le courant alternatifs sous leurs formes complexes 𝑈̅ et 𝐼*.*̅

On définit également la notion d’*impédance complexe* comme une généralisation de la notion de résistance. La loi d’Ohm en régime alternatif devient alors :

𝑈̅ = 𝑍̅ 𝐼̅

Si ̅(𝑡) = 𝑈0 . 𝑒j(𝜔𝑡+𝜑) et si 𝐼̅ = 𝐼0 . 𝑒j(𝜔𝑡+Ø) alors l’impédance vaut :

𝑍̅ =

𝑈0𝑒j(𝜔𝑡+𝜑)

𝐼0𝑒j(𝜔𝑡+Ø)

𝑈0

=

𝐼0

𝑒j(𝜑−Ø)

Le *module* de l’impédance est donc égal au rapport des modules de la tension et de l’intensité. Son *argument* ou *déphasage* est égal à la différence des arguments de la tension et de l’intensité.