Prérequis

1. Application linéaire

2. Rappels sur les déterminants

Application linéaire

$$\boxed{\textbf{Comprendre l'Algèbre linéaire ?}}$$

Comprendre l'Algèbre linéaire ?

Comprendre l'Algèbre linéaire 1 ?

Problème réel $\rightarrow$ Relation linéaire $\rightarrow$ Matrice associée $\rightarrow$ système linéaire

Comprendre l'Algèbre linéaire ?

Comprendre l'Algèbre linéaire 1 ?

Problème réel $\rightarrow$ Relation linéaire $\rightarrow$ Matrice associée $\rightarrow$ système linéaire

Comprendre l'Algèbre linéaire 2 ?

Travailler sur l'endomorphisme revient à manipuler ses matrices pour simplifier les calculs

Comprendre l'Algèbre linéaire ?

Comprendre l'Algèbre linéaire 1 ?

Problème réel $\rightarrow$ Relation linéaire $\rightarrow$ Matrice associée $\rightarrow$ système linéaire

Comprendre l'Algèbre linéaire 2 ?

Travailler sur l'endomorphisme revient à manipuler ses matrices pour simplifier les calculs

Definition

On dit que $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire si

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+f(y), \\ f(\alpha.x) &= \alpha f(x), \end{aligned}$$

$\forall\ x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Comprendre l'Algèbre linéaire ?

Comprendre l'Algèbre linéaire 1 ?

Problème réel $\rightarrow$ Relation linéaire $\rightarrow$ Matrice associée $\rightarrow$ système linéaire

Comprendre l'Algèbre linéaire 2 ?

Travailler sur l'endomorphisme revient à manipuler ses matrices pour simplifier les calculs

Definition

On dit que $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire si

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+f(y), \\ f(\alpha.x) &= \alpha f(x), \end{aligned}$$

$\forall\ x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Definition
On dit que $f : E \to F$ est une application linéaire si

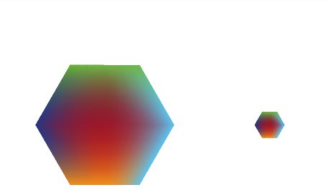
$$f(x + \alpha y) \quad = \quad f(x) + \alpha f(y),$$

$\forall\ x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Definition
On dit que $f : E \to F$ est une application linéaire si

$$f(x+\alpha y) \quad = \quad f(x)+\alpha f(y),$$

$\forall\ x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.



Definition
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. On appelle noyau de f, l'ensemble défini par:

$$kerf = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

2. On appelle image de f, l'ensemble défini par:

$$Imf = \{y \in F \; \exists x \in E : y = f(x)\}.$$

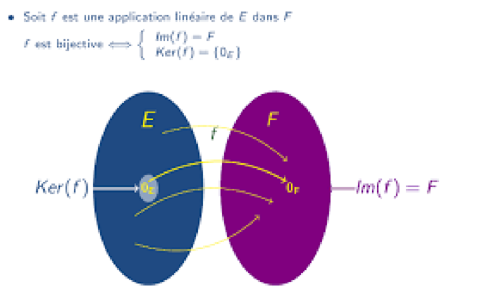
Definition
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. On appelle noyau de f, l'ensemble défini par:

$$kerf = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

2. On appelle image de f, l'ensemble défini par:

$$Imf = \{y \in F\ \exists x \in E : y = f(x)\}.$$



Definition
Soit $f : E \to F$ une application linéaire et E de dimension finie. On appelle rang de f, noté $rg(f)$ la dimension de Imf, c'est à dire

$$rg(f) = dimImf.$$

Definition
Soit $f : E \to F$ une application linéaire et E de dimension finie. On appelle rang de f, noté $rg(f)$ la dimension de Imf, c'est à dire

$$rg(f) = dimImf.$$

Theorem
Soit $f : E \to F$ une application linéaire et E de dimension finie, alors:

$$dimE = dimkerf + dimImf.$$

Theorem
(Caractérisation de l'injectivité/surjectivité par l'image d'une base)

Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i \in I}$.

(i) *f est surjective si et seulement si $F = \mathrm{Vect}\{(f(e_i))_{i \in I}\}$,*

Theorem
(Caractérisation de l'injectivité/surjectivité par l'image d'une base)
Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i \in I}$.

(i) *f est surjective si et seulement si $F = \mathrm{Vect}\{(f(e_i))_{i \in I}\}$,*

(ii) *f est injective si et seulement si $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre,*

Theorem
(Caractérisation de l'injectivité/surjectivité par l'image d'une base)
Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i\in I}$.

(i) *f est surjective si et seulement si $F = \operatorname{Vect}\{(f(e_i))_{i\in I}\}$,*

(ii) *f est injective si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre,*

(iii) *f est bijective si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.*

Example

1. Considérons l'application:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+2y, x+2y, 3x-y). \end{array}$$

Example

1. Considérons l'application:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+2y, x+2y, 3x-y). \end{array}$$

   Soit $\{(1,0),(0,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$.Comme

$$g((1,0)) = (1,1,3), \quad g((0,1)) = (2,2,-1)$$

   et $\{(1,1,3),(2,2,-1)\}$ est libre, alors g est injective.

2. Soit l'endomorphisme h défini par

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P + XP'. \end{array}$$

2. Soit l'endomorphisme h défini par

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P + XP'. \end{array}$$

$\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$h(1) = 1, \quad h(X) = 1 + X, \quad h(X^2) = 3X^2 \quad \text{et} \quad h(X^3) = 4X^3.$$

Comme $\{1, 1 + X, 3X^2, 4X^3\}$ est libre et
$\dim \mathbb{R}_3[X]$=Card$\{1, 1 + X, 2X + 3X^2, 3X^2 + 4X^3\} = 4$.
Alors, $\{1, 1 + X, 2X + 3X^2, 3X^2 + 4X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et h est bijective.

Theorem
(Application linéaire entre espaces vectoriels de même dimensions finies) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies égales et f une application linéaire de E dans F. Alors,*

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Definition
Soient $f : E \to F$ une application linéaire, E et F de dimensions finies et $B = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ une base de E et $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ une base de F.

On appelle matrice de f relativement aux bases B et B' la matrice dont les colonnes sont formées par $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)\}$. On la note $\mathcal{M}at(f)_{B'}^{B}$. Ainsi:

$$\mathcal{M}at(f)_{B'}^{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array}$$

Example
Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+3y+2z) \end{array}$$

Rappels sur les déterminants

Definition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit par récurrence une application

$$det : \begin{array}{ccl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & detA \end{array}$$

de la manière suivante:

Definition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit par récurrence une application

$$\begin{aligned} det: \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto detA \end{aligned}$$

de la manière suivante:

1. Si $n = 1$, $A = (a)$ on pose $detA = a$.
2. Si $n > 1$, $detA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{q+i} a_{iq} \times (S_{iq}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{p+j} a_{pj} \times (S_{pj})$.
   avec S_{pq} la matrice carrée d'ordre $n-1$, obtenue en supprimant à A la $P^{ième}$ ligne et la $q^{ième}$ colonne.

Definition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit par récurrence une application

$$\begin{aligned} det: \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto detA \end{aligned}$$

de la manière suivante:

1. Si $n = 1$, $A = (a)$ on pose $detA = a$.
2. Si $n > 1$, $detA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{q+i} a_{iq} \times (S_{iq}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{p+j} a_{pj} \times (S_{pj})$.
   avec S_{pq} la matrice carrée d'ordre $n-1$, obtenue en supprimant à A la $P^{ième}$ ligne et la $q^{ième}$ colonne.

Le scalaire $detA$ est dit déterminant de A et on le note habituellement:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{vmatrix}.$$

Example

1) Déterminant d'une matrice 2×2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On a

Example

1) Déterminant d'une matrice 2×2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On a

$$detA = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Example

1) Déterminant d'une matrice 2×2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On a

$$detA = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

2) Déterminant d'une matrice 3×3.

Soit $A = \begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3. On a

Example

1) Déterminant d'une matrice 2×2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On a

$$detA = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

2) Déterminant d'une matrice 3×3.

Soit $A = \begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3. On a

$$detA = \begin{vmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Proposition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i) *Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

Proposition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i) *Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

ii) $det A = det\, {}^t A$, *où* ${}^t A$ *est la matrice transposé de* A.

Proposition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i) *Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

ii) $detA = det\,{}^tA$, *où* ${}^tA$ *est la matrice transposé de* A.

iii) $det(AB) = detA.detB$.

Proposition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i) *Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

ii) $detA = det\,{}^tA$, *où* ${}^tA$ *est la matrice transposé de* A.

iii) $det(AB) = detA.detB$.

iv) *Si* A *est inversible, alors* $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{detA}$.

Proposition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- **i)** *Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.*
- **ii)** $detA = det^tA$, *où* ^tA *est la matrice transposé de* A.
- **iii)** $det(AB) = detA.detB$.
- **iv)** *Si* A *est inversible, alors* $det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{detA}$.
- **v)** *Si une colonne (ligne) de* A *est nulle, alors* $detA = 0$.

Proposition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- **i)** *Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.*
- **ii)** $detA = det\,{}^tA$, *où* ${}^tA$ *est la matrice transposé de* A.
- **iii)** $det(AB) = detA.detB$.
- **iv)** *Si* A *est inversible, alors* $det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{detA}$.
- **v)** *Si une colonne (ligne) de* A *est nulle, alors* $detA = 0$.
- **vi)** *Si* $\alpha \in K$, *alors* $det(\alpha A) = \alpha^n detA$.

Theorem
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On peut associer un unique scalaire, appelé déterminant de A et caractérisé par:*

1. *Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'une matrice A sont nuls alors* $\det(A) = 0$.

Theorem
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut associer un unique scalaire, appelé déterminant de A et caractérisé par:

1. *Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'une matrice A sont nuls alors $\det(A) = 0$.*
2. *Si deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant sont proportionnelles (ou identiques) alors il est nuls.*

Theorem
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut associer un unique scalaire, appelé déterminant de A et caractérisé par:

1. *Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'une matrice A sont nuls alors* $\det(A) = 0$.
2. *Si deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant sont proportionnelles (ou identiques) alors il est nuls.*
3. *Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, le signe du déterminant est changé.*

Theorem
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut associer un unique scalaire, appelé déterminant de A et caractérisé par:

1. *Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'une matrice A sont nuls alors $\det(A) = 0$.*
2. *Si deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant sont proportionnelles (ou identiques) alors il est nuls.*
3. *Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, le signe du déterminant est changé.*
4. *Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) est multiplié par un scalaire k, le déterminant est multiplié par k.*

Theorem
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On peut associer un unique scalaire, appelé déterminant de A et caractérisé par:*

1. *Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'une matrice A sont nuls alors* $\det(A) = 0$*.*
2. *Si deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant sont proportionnelles (ou identiques) alors il est nuls.*
3. *Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, le signe du déterminant est changé.*
4. *Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) est multiplié par un scalaire* k*, le déterminant est multiplié par* k*.*
5. *Si on ajoute aux éléments d'une ligne (ou colonne)* k *fois les éléments correspondants d'une autre ligne (ou colonne), la valeur du déterminant reste inchangée.*

Example

1. On a

$$\det \begin{pmatrix} -4 & 2 & -12 & 17 \\ 11 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

car tous les éléments de la ligne 4 sont nuls.

Example

1. On a
$$\det \begin{pmatrix} -4 & 2 & -12 & 17 \\ 11 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$
car tous les éléments de la ligne 4 sont nuls.

2. On a
$$\det \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -4 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 0,$$
car $C_2 = 2C_1$.

Example

1. On a

$$\det\begin{pmatrix} -4 & 2 & -12 & 17 \\ 11 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

   car tous les éléments de la ligne 4 sont nuls.

2. On a

$$\det\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -4 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 0,$$

   car $C_2 = 2C_1$.

3. On a

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 11 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 11 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 5 & 11 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1+1 & 1+2 & 1+0 \\ 2-2\times 1 & 1-2\times 2 & 1-2\times 0 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 3\times 1 - 1\times 5 = -2.
\end{aligned}$$

Pour calculer l'inverse d'une matrice A d'ordre n, dont on sait qu'elle est inversible, on procède de la façon suivante :

1. On considère la matrice E de taille $n \times 2n$, dont les n premières colonnes sont celles de A et les n dernières colonnes sont celles de I_n.
2. On applique à E des transformations élémentaires sur lignes de sorte que les n premières colonnes de E se transforment en I_n, dès lors les n dernières colonnes de la matrice transformée forment la matrice inverse de A.

Example

1. Calculons l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Pour cela

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 11 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Example

1. Calculons l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Pour cela

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 11 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Example

1. Calculons l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Pour cela

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 11 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \longrightarrow \frac{1}{11}L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & 0 \end{array}\right)$$

Example

1. Calculons l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Pour cela

$$
\begin{array}{ll}
 & \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 11 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
L_1 \longleftrightarrow L_2 & \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \longrightarrow \frac{1}{11}L_2 \end{array} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & 0 \end{array}\right) \\
L_1 \longrightarrow L_1 + \frac{3}{2}L_2 & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{22} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & 0 \end{array}\right),
\end{array}
$$

Theorem
Si A est une matrice inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^{t}\operatorname{com}(A)$$

Example

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible (i. e $ad - bc \neq 0$). Dans ce cas,

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

et par suite

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est inversible, puisque $\det(A) = 14 \neq 0$. La comatrice de A est:

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 18 & 4 \\ -1 & -6 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent:

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10 & 18 & 4 \\ -1 & -6 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$