Tables des matières……………………………………………………………………..............i

Introduction...…..............................iv

Chapitre I : Outils Mathématiques

1.1. Introduction…………………………………………………………………………….01

1.2. Vecteurs et Scalaires………………………………………………………………...01

1.2.1. Notion de vecteur...01

1.2.2. Classification des vecteurs………………………………………………….......01

1.2.3. Composantes d'un vecteur…………………………………………………...02

1.2.3. a.Vecteurs unitaires……………………………………………………………..02

1.2.3. b.Vecteurs positions…………………………………………………………….02

1.2.3. c.Multiplication par un scalaire……………………………………………....02

1.2.3. d.Produit scalaire de deux vecteurs……………………………………………..02

1.2.3. e.Produit vectoriel de deux vecteurs…………………………………………….03

1.2.3. f.Produit vectoriel des vecteurs unitaires d'une base orthonormée………………….04

1.3. Repérage des vecteurs : bases d'écriture……………………………………………….04

1.3.1. Base de l'espace vectoriel ……………………………………………………….04

1.3.2. Base orthonormée directe……………………………………………………..05

1.3.3. Repère orthonormé direct de l'espace affine……………………………………..05

1.3.4. Composantes et projections ……………………………………………………...06

1.3.5. Changement de base d'un vecteur, par projections…………………………………....06

1.3.6. Fonction vectorielle…………………………………………………….............07

1.3.7.Règles de dérivation……………………………………...07

1.4. Exercices sur les outils mathématiques……………………………………………….......08

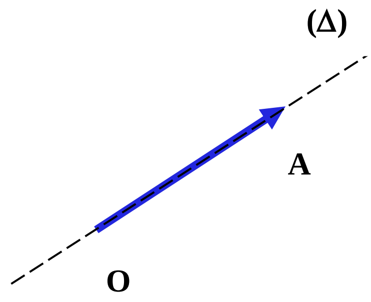
1.1.Introduction

Dans ce chapitre nous étudieront les opérations mathématiques sur les vecteurs.

1.2.Vecteurs et Scalaires

Des grandeurs telles que longueur, surface ou masse se laisse décrire complètement par des nombres réels ou scalaires. D'autres, telles que vitesse, accélération ou force nécessitent qu'on précise en plus de leur intensité, leur direction et leurs sens. Ces grandeurs sont désignées mathématiquement par des objets qu'on appellera " vecteurs ".

1.2.1. Notion de vecteur



Un vecteur est un segment de droite ***OA*** sur lequel on a choisi une origine ***O*** et une extrémité A ; il est défini par :

- son origine (point d'application) ;
- sa direction (support);
- son sens et son module (intensité).

- La direction est la droite qui porte le vecteur. Elle est définie par l'angle θ mesure entre un axe de référence et le support.
- Le sens représente l'orientation origine-extrémité du vecteur et est symbolisé par une flèche.
- L'intensité, norme ou module, représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur. Graphiquement, elle correspond à la longueur de celui-ci. Notation :
- Le point d'application est le point qui sert d'origine à un représentant (ou image) du vecteur.

1.2.2. Classification des vecteurs

Il existe plusieurs types de vecteurs :

- Vecteur libre : la direction, le sens et le module sont donnés mais la droite support et le point d'application (origine du vecteur) ne sont pas connues ;

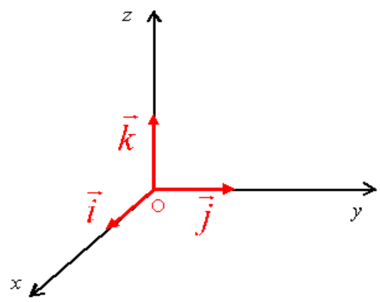
- Vecteur glissant : le point d'application (origine du vecteur) n'est pas fixé

- Vecteur lié : tous les éléments du vecteur sont déterminés

- Vecteur unitaire : c'est un vecteur dont le module est égal à 1.

1.2.3. Composantes d'un vecteur

1.2.3. a. Vecteurs unitaires

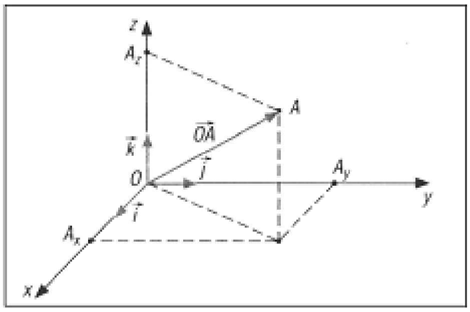


Les vecteurs $\vec{i}$ $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires d'intensité égale à 1. $\vec{i}$ $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs de base du repère orthonormé $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

1.2.3. b. Vecteurs positions

Les vecteurs positions sont utilisés pour repérer la position d'un point ou pour représenter un segment ou une distance.

- ✓ **Position d'un point A dans l'espace**



$$\begin{cases} \vec{OA}\begin{cases} X_A = OA_x \\ Y_A = OA_y \\ Z_A = OA_z \end{cases} \\ \vec{OA} = \vec{X}_A.\vec{i} + \vec{Y}_A.\vec{j} + \vec{Z}_A.\vec{k} \end{cases}$$

- ✓ **Représentation d'une distance**

$$\vec{OA}\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \vec{OB}\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AB} = (\vec{X}_B - \vec{X}_A).\vec{i} + (\vec{Y}_B - \vec{Y}_A).\vec{j} + (\vec{Z}_B - \vec{Z}_A).\vec{k}$$

$$AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

1.2.3. c. Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre réel et $\vec{V}$ un vecteur, leur produit est un vecteur $\vec{W}$ tel que : $\vec{W} = \lambda.\vec{V}$.

Le vecteur $\vec{W}$ est colinéaire au vecteur $\vec{V}$.

1.2.3.d. Produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{A}.\vec{B} = \|A\|.\|B\|.\cos(\theta)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z$$

✓ **Propriétés du produit scalaires**

- $\vec{A}.\vec{B} = .\vec{B}.\vec{A}$
- $(\vec{A}.+\vec{B}).\vec{C} = .\vec{A}.\vec{C} + \vec{B}.\vec{C}$
- $\lambda(\lambda(\vec{A}.\vec{B}) = .(\lambda\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(\lambda\vec{B})$

Exemple : déterminons le produit scalaire des vecteurs $\vec{A} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{B} = 7\vec{i} - 3\vec{j}$, $F_3 = 4\vec{i} + \vec{j}$

$$\vec{A}.\vec{B} = (4.7) + (4.(-3)) = 28 - 12 = 16$$

$$A = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.66$$

$$B = \sqrt{7^2 + (-3^2)} = 7.62$$

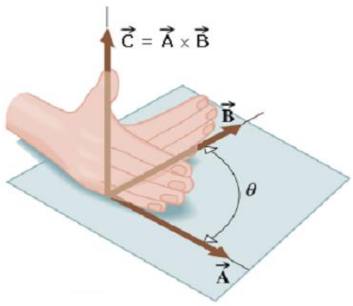
$$\theta = 68.2°$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 5.66.7.62.\cos(68.2°) = 16$$

$$\vec{A}.\vec{B} = .(4.7) + (4.(-3)) = 28 - 12 = 16$$

1.2.3. e. Produit vectoriel de deux vecteurs

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\sin(\theta).\vec{u}_c$$



$$\vec{A} = \begin{cases} A_x \\ A_y \\ A_z \end{cases} \quad ; \quad \vec{B} = \begin{cases} B_x \\ B_y \\ B_z \end{cases}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{cases} A_x \\ A_y \\ A_z \end{cases} \wedge \begin{cases} B_x \\ B_y \\ B_z \end{cases} = \begin{vmatrix} A_y & B_y \\ A_z & B_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_z & B_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{cases} A_y.B_z - A_z.B_y \\ A_z.B_x - A_x.B_z \\ A_x.B_y - A_y.B_x \end{cases}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y.B_z - A_z.B_y)\vec{i} + (A_z.B_x - A_x.B_z)\vec{j} + (A_x.B_y - A_y.B_x)\vec{k}$$

✓ **Propriétés du produit vectoriel**

- $\vec{C}$ est à la fois perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$
- Le produit vectoriel n'est pas commutatif $(\vec{A} \wedge \vec{B}) = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$
- $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$
- $\lambda(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\lambda\vec{A}) \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge (\lambda\vec{B})$
- $(\vec{A} \wedge \vec{A}) = -(\vec{A} \wedge \vec{A}) = \vec{0}$

- Si $(\vec{A} // \vec{B})$ alors $(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$

✓ **Double produit vectoriel**

$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$

1.2.3. f. Produit vectoriel des vecteurs unitaires d'une base orthonormée

Si $b = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée et directe nous avons :

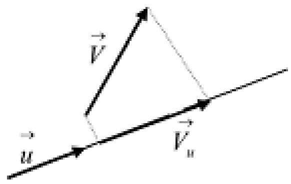
Sens direct : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

Sens opposé : $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$; $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

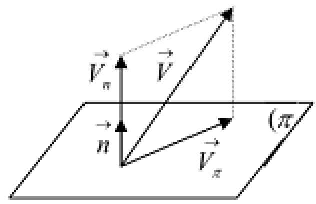
✓ **Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe** La projection orthogonale d'un vecteur sur un axe dont le vecteur unitaire est $\vec{u}$ est donné par : $\vec{V}_u = (\vec{V}.\vec{u})\vec{u}$

✓ **Projection orthogonale d'un vecteur sur un plan**

Soit $\vec{V}$ un vecteur quelconque, et (π) un plan de l'espace défini par la normale $\vec{n}$. La projection orthogonale du vecteur $\vec{V}$ est la composante $\vec{V}_\pi$ dans le plan. Le vecteur $\vec{V}$ a deux composantes l'une dans le plan et l'autre perpendiculaire au plan.



$$\vec{V}_\pi = \vec{V} - \vec{V}_n = \vec{V} - (\vec{V}.\vec{n})\vec{n}$$



Où sous la forme $\vec{V}_\pi = (\vec{n}.\vec{n})\vec{V}_n - (\vec{V}.\vec{n})\vec{n}$ qui représente le double produit vectoriel : $\vec{V}_\pi = \vec{n} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{n})$

1.3. Repérage des vecteurs : bases d'écriture

1.3.1. Base de l'espace vectoriel

On appelle base de l'espace vectoriel ***E***, de dimension trois, tout triplet de vecteurs linéairement indépendants tel que tout vecteur $\vec{V}$ de ***E*** puisse s'écrire de façon unique :

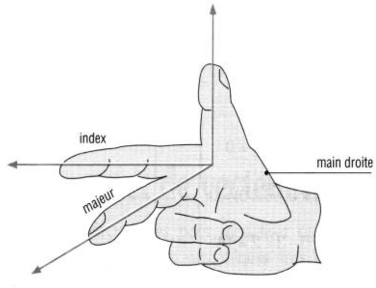
$\vec{V} = V_x\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z}$ dans la base $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

1.3.2. Base orthonormée directe

Une base $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est dite **orthonormée** si ses vecteurs sont :

orthogonaux deux à deux : on aura donc $\vec{x}\perp\vec{y}$, $\vec{y}\perp\vec{z}$ et $\vec{z}\perp\vec{x}$;

de normes égales à l'unité :on aura donc $\|\vec{x}\|=\|\vec{y}\|=\|\vec{z}\|=1$.

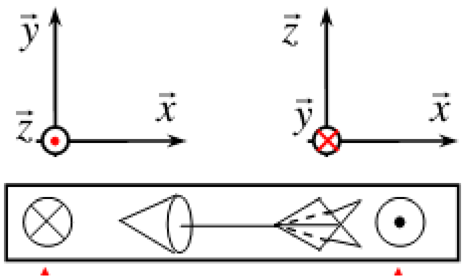


Une base orthonormée sera **directe** si ses vecteurs respectent « la règle des trois doigts de la main droite » ou « règle du vissage » ou « règle du bonhomme d'Ampère ».

La mise en œuvre de cette forme directe le sera vectoriellement par le produit vectoriel : voir ci-après. Dans une projection plane d'une base orthonormée directe, on passe de x vers y ou de y vers z ou de z vers x de façon directe (sens positif), à condition que le 3^e^ vecteur « pointe vers nous ».

Remarque :

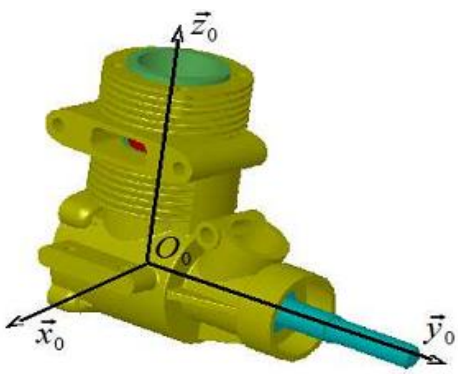
Dans les études mécaniques (cinématique, statique, dynamique) on utilisera toujours des repères orthonormés directs. Si cette condition n'est pas respectée, des erreurs de calcul seront commises !



1.3.3. Repère orthonormé direct de l'espace affine

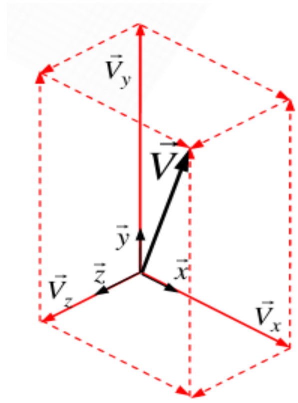
Un repère R de l'espace affine *E* est constitué par un point **origine** du repère O et une **base** orthonormée directe $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ de l'espace vectoriel réel ***E*** associé à ***E***. Ce repère est le plus souvent noté $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Donc le cas de la cinématique, on associera généralement un repère à un solide. Le repère restera fixe $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ (attaché) par rapport au solide. On définira autant de repères que de solides.



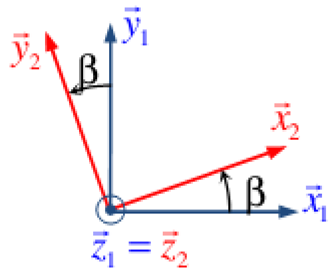
1.3.4. Composantes et projections

On appelle « composantes du vecteur V dans la base *R* » les projections vectorielles du vecteur $\vec{V}$ sur les vecteurs la base R. Ainsi le vecteur $\vec{V}$ possède 3 composantes $\vec{V}_x$, $\vec{V}_y$ et $\vec{V}_z$ telles que : $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z = V_x\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z}_z$

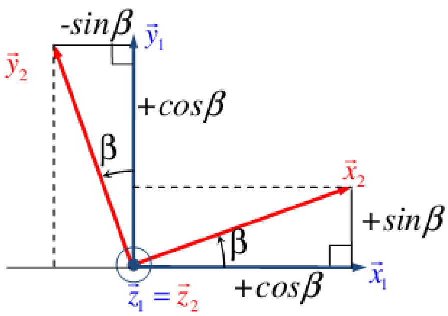


1.3.5. Changement de base d'un vecteur, par projections

On définit la base $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, et la base $R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ comme suit : On appelle cette figure : rotation plane, ou figure de calcul. Sachant que le passage d'une base à une autre peut se faire par maximum trois rotations, il faut parfois plusieurs figures planes pour illustrer le passage d'une base à une autre, mais on se servira toujours de cet outil simple et graphique.



Si l'on désire écrire dans la base 1 un vecteur que l'on connait dans la base 2, il convient d'abord d'écrire les vecteurs unitaires de la base 2 dans la base 1. Pour cela on écrit qu'un vecteur est égal à la somme de ses projections dans les trois directions de la base souhaitée :

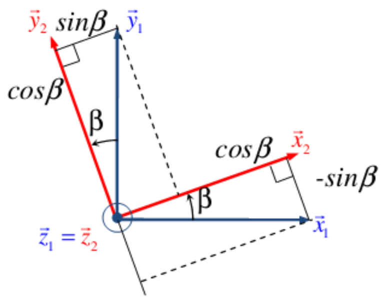


On a donc : $\vec{x}_2 = \cos(\beta).\vec{x}_1 + \sin(\beta).\vec{y}_1$

$$\vec{y}_2 = -\sin(\beta).\vec{x}_1 + \cos(\beta).\vec{y}_1$$

$$\vec{z}_2 = \vec{z}_1$$

De même, si l'on veut écrire dans la base 2 un vecteur que l'on connait dans la base 1, il faudrait d'abord écrire les vecteurs unitaires de la base 1 dans la base 2 :



$$\vec{x}_1 = \cos(\beta).\vec{x}_2 - \sin(\beta).\vec{y}_2$$

$$\vec{y}_1 = \sin(\beta).\vec{x}_2 + \cos(\beta).\vec{y}_2$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_2$$

Exemple :

Soit : $\vec{V}_1 = 3.\vec{x}_1 + 2.\vec{y}_2$ dans la base R_1 : $\vec{V} = (3 - 2.\sin(\beta)).\vec{x}_1 + 2.\cos(\beta).\vec{y}_1$

On préfèrera toutefois écrire les vecteurs dans leur forme la plus simple, et donc pas forcément dans une base donnée. Par exemple le vecteur $\vec{V_1} = 3.\vec{x}_1 + 2.\vec{y}_2$ ne sera pas projeté dans une base particulière pour les calculs (sauf pour connaître sa norme).

Remarque :

La non indication de la base d'écriture est évidemment totalement incohérente et sera lourdement sanctionnée !!!

1.3.6. Fonction vectorielle

Si à chaque valeur d'une variable scalaire t correspond un vecteur $\vec{V}(t)$, ce vecteur est appelé « fonction vectorielle » de t . $\vec{V}(t)$ est donc un vecteur dont le module, la direction et le sens dépendent de la variable t (qui sera en générale le temps).

1.3.7. Règles de dérivation

Dans une base (O,x, y, z) fixe, le vecteur $\vec{V}(t)$ est donné par :

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$$

La dérivée de $\vec{V}(t)$ est définit par :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \lim \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

à condition a cette limite existe.

On utilisera comme notation, dans le cas ou t représente le temps, sachant que la dérivée des vecteurs unitaires sont nuls (constant en grandeur et en direction) :

$$\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\dot{\vec{V}}(t) = \dot{V}_x(t)\vec{i} + \dot{V}_y(t)\vec{j} + \dot{V}_z(t)\vec{k}$$

De même, on peut définir des dérivées d'ordre supérieur. Par exemple, la dérivée seconde de $\vec{V}(t)$ est donnée par :

$$\ddot{\vec{V}}(t) = \frac{d^2\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2V_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{d^2V_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{d^2V_z(t)}{dt}\vec{k},$$

$$\ddot{\vec{V}}(t) = \ddot{V}_x(t)\vec{i} + \ddot{\vec{V}}(t)\vec{j} + \ddot{\vec{V}}(t)\vec{k}$$

1.4. Exercices sur les outils mathématiques

Exercice N° 01 :

Soit les points dans le plan (*OXY*) : A (-2,3) ; B (3,1) ; C (1,4) ; D (5,3).

1) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ ainsi que le module, la direction et le sens de ses vecteurs.
2) Représenter graphiquement ces vecteurs.

Exercice N° 02 :

Soit les points dans le plan (*OXY*) : A(1,4,3) ; B(2,3,5) ; C(5,2,-1) ; D(-3,4,7).

1) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{CD}$.

- $\vec{AB}+\vec{CD}$;
- $\vec{AB}.\vec{CD}$;
- $\vec{AB}\wedge\vec{CD}$;
- $\|\vec{AB}\|.\|\vec{CD}\|$;
- $\|\vec{AB}\wedge\vec{CD}\|$.

Exercice N° 03 :

Soit les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2\ \vec{V}_3$ et $\vec{V}_4$ tel que : vecteurs

$\vec{V}_1(a, 4, 2)$, $\vec{V}_2(2, 3, b)$, $\vec{V}_3(1, 4, c)$, et $\vec{V}_4(2, 3, 7)$

1) Déterminer a et b pour que les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ soient colinéaires ;
2) Déterminer la valeur de c pour que les vecteurs $\vec{V}_3$ et $\vec{V}_4$ soient perpendiculaires.

Exercice N° 04 :

Soit le solide surfacique homogène suivant formé d'un quart de couronne circulaire de rayon intérieur **R_1** et extérieur **R_2** comme représenté sur la figure.1

1) Ecrire la matrice de passage du repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ vers le repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$;

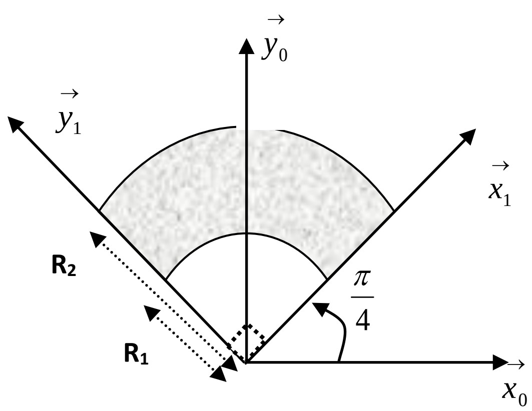


Figure : 01