

Cours de la programmation linéaire
Pour les étudiants de la première année master mathématiques appliquées et
mathématiques fondamentales
Département de mathématiques et informatiques
Université abdelhafid BOUSSOUF MILA
Anné universitaire 2023/2024

Chapitre 1

Table des matières

| | |
|--|----------|
| introduction | 4 |
| 1 Introduction à la programmation linéaire | 5 |
| 1.1 Notions fondamentales et Définitions | 5 |
| 1.1.1 Méthodologie d'approche d'un problème de la recherche opérationnelle | 6 |
| 1.2 Technique de la programmation linéaire | 7 |
| 1.2.1 Rappel sur l'algèbre linéaire | 7 |
| 1.2.1.1 Espace vectoriel | 7 |
| 1.2.1.2 Rang d'une matrice | 8 |
| 1.2.1.3 Système d'équations | 8 |
| 1.2.2 Introduction à la programmation linéaire | 8 |
| 1.2.3 Définitions et différentes formes d'un programme linéaire | 9 |
| 1.2.3.1 La forme standard | 10 |
| 1.2.3.2 La forme canonique | 10 |
| 1.3 Espace des solutions | 12 |
| 1.4 Géométrie de la programmation linéaire | 13 |

| | | |
|-----|--|----|
| 1.5 | Résolution d'un programme linéaire | 15 |
| 1.6 | Résolution graphique d'un programme linéaire | 15 |

Introduction

La recherche opérationnelle peut être considérée comme un ensemble de méthodes utilisables pour élaborer des meilleures décisions. Elle permet de modéliser des problèmes issus du monde réel, identifier les méthodes de résolutions et les outils les plus adaptés face à un problème pratique. Elle fait partie de "l'aide à la décision" qui est un ensemble des techniques permettant pour une personne donnée d'opter pour la meilleure prise de décision possible. Comme toute théorie, la recherche opérationnelle ne cesse de se développer pour élargir son champ d'application dans les différents domaines. Certains problèmes de prise de décision imposent la prise en compte de la présence de plusieurs objectifs pour le preneur de décision. Par conséquent, l'homme d'étude doit s'appuyer sur ces objectifs, qui serviront de critères, pour sélectionner la décision réalisable à proposer au décideur.

La Programmation Linéaire est un cadre mathématique général permettant de modéliser et de résoudre certains problèmes d'optimisation. Mathématiquement le problème consiste à Optimiser une Fonction Linéaire sous des Contraintes Linéaires liant les variables. Historiquement, la programmation linéaire a été développée et utilisée en 1947 par George Bernard Danzig, Marshall Wood et leurs collaborateurs au U.S. Department of the Air Force. Les premières applications se situaient dans le domaine militaire mais elles se sont rapidement déplacées vers l'industrie et la planification économique : il s'agit par exemple de déterminer la production maximisant le bénéfice compte tenu de ressources limitées ou minimisant les coûts tout en garantissant une production donnée, de résoudre des problèmes d'allocation de ressources limitées en vue d'atteindre des objectifs fixés, ...

1

Introduction à la programmation linéaire

1.1 Notions fondamentales et Définitions

En 1960, le journal de la société de la recherche opérationnelle a défini la recherche opérationnelle comme suit :

” La recherche opérationnelle est l’application des méthodes scientifiques à des problèmes complexes qui se posent lors de la gestion de gros systèmes composés de l’homme, d’argent et de matières dans divers domaines tels que l’industrie, les finances, le gouvernement et la défense”. L’approche est de développer un modèle scientifique du système qui inclut certains facteurs, avec lequel on prédit et on compare les conséquences des décisions (stratégies). L’objectif est d’aider le décideur à la prise de décision en lui fournissant un outil scientifique.

1.1.1 Méthodologie d'approche d'un problème de la recherche opérationnelle

Plusieurs étapes sont nécessaires pour aborder un problème de la recherche opérationnelle. La figure suivante résume ces différentes étapes :

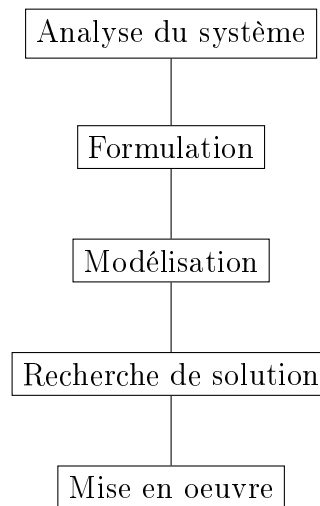


FIGURE 1.1 – graphe G

Analyse du système : C'est l'étape la plus difficile d'un problème de la recherche opérationnelle. Le but de cette analyse est de comprendre l'environnement dans lequel le problème est posé pour mieux cerner les aspects les plus importants. Il faut consacrer suffisamment du temps et d'effort à cette phase.

Formulation d'un problème (structuration) : Cette phase consiste à identifier tous les objectifs et les contraintes du problème. Il est évident que cette étape ne peut se faire sans la précédente. Une mauvaise analyse du système influe considérablement sur sa structuration. Un objectif est un but à atteindre. Il ne faut pas le confondre avec une action qui est un moyen à atteindre cet objectif. Il existe des situations où le problème en question possède un objectif facilement identifiable et quantifiable. Par exemple : maximiser un profit, minimiser un coût total, minimiser une distance totale. . .

Par contre dans d'autres situations le problème posé possède plusieurs objectifs dont certains ne sont pas quantifiables. Par exemple : maximiser la satisfaction de la clientèle tout en maximisant le profit total.

Modélisation : Il s'agit dans cette étape d'extraire une image aussi fidèle que possible de la réalité. Un modèle peut prendre la forme mathématiques (programme linéaire, non linéaire, graphe, modèle de régression...), simulation...

La construction d'un modèle passe par plusieurs phases : Recueil des données, construction du modèle, validation du modèle.

Recherche de solution : La recherche de solution se fait par plusieurs techniques :

Technique d'optimisation : Pour une certaine classe de problèmes, il existe des algorithmes permettant d'offrir des solutions optimales. Par exemple en théorie des graphes l'algorithme

1.2 Technique de la programmation linéaire

de Bellman résoud les problèmes de cheminement.

Méthodes heuristiques et Métaheuristiques : Parfois la recherche de solution optimale pour pour certain classes de problèmes (la classe NP) est impossible en raison du temps d'exécution et de l'espace mémoire que l'on dispose. Nous avons alors recours à des méthodes approchées dites heuristiques. Par exemple pour le problème de voyageur du commerce l'heuristique du plus proche voisin permet d'offrir une solution approchée très simple. De nos jours nous assistons au développement de métaheuristiques offrant de meilleures solutions, on cite : Les algorithmes génétiques, la recherche Tabou,...

Simulation : En simulation le modèle représente le comportement réel du système en le laisse varier jusqu'à observer un comportement satisfaisant. Cette technique est une alternative aux méthodes précédentes.

Evaluation : Il s'agit de choisir un ensemble d'actions celles qui est la plus désirable. L'approche est d'évaluer scientifiquement les conséquences de chaque action puis de faire le choix selon certain critère défini au préalable.

Mise en oeuvre : La dernière étape consiste à mettre en oeuvre en utilisant des outils informatiques (programmation, base de données, ...) et à contrôler la solution obtenue à partir du modèle. souvent cette étape sert de Feed Back (Retour arrière) aux étapes précédentes.

1.2 Technique de la programmation linéaire

1.2.1 Rappel sur l'algèbre linéaire

1.2.1.1 Espace vectoriel

Un espace vectoriel V défini sur le corps des réels est un ensemble d'éléments vecteurs, appelés vecteurs ou points et noté $x, y, z \dots$ vérifiant : $\forall x, y \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda x + \mu y \in V$. 0 désigne le vecteur nul, neutre de la loi $+$. L'expression $\sum_{j=1}^n \lambda_j x^j$ est une combinaison linéaire des vecteurs x^1, x^2, \dots, x^n . Si de plus $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ est une combinaison linéaire convexe.

Une base d'un espace vectoriel V est une famille de vecteurs de V linéairement indépendants et dont tout vecteur de V est combinaison linéaire. En d'autres termes, une base de V est une famille libre de vecteurs de V qui engendre V . La dimension de V est le cardinal commun à toutes ses bases.

1.2 Technique de la programmation linéaire

1.2.1.2 Rang d'une matrice

Une matrice $A=(a_{ij}, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n)$ de dimension $m \times n$ peut être considérée comme une matrice formée de m vecteurs lignes de dimension n . $\alpha_i = (a_{ij}, j=1,\dots,n, i=1,\dots,m)$ ou de n vecteurs colonnes de dimension m $B_j=(a_{ij}, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n)$

Le rang de la matrice A , noté $rg(A)$ est le nombre maximal de vecteurs L.I parmi les m vecteurs lignes ou les n vecteurs colonnes.

Une matrice carrée B de dimension $m \times n$ est dite régulière si son rang $rg(B) = m$ est donc inversible et la matrice inverse vérifie $B^{-1}B = BB^{-1} = I_{n \times m}$.

1.2.1.3 Système d'équations

Soit un système de m équations à n variables $A X = b$. $\sum_{j=1}^n a_{ij}^j x^j = b$ $i = 1, m$

Les résultats de l'algèbre linéaire donnant :

- Si $rg(A) < rg(A, b)$ le système est impossible et ne possède aucune solution.
- Si $rg(A) = rg(A, b) = n$ le système possède une solution unique.
- Si $rg(A) = m$ ($m < n$) le système possède :
 - Une solution unique si $m = n$, cette solution est : $x=A^{-1}b$.
 - Une infinité de solution si $m < n$.
 - Si M est une matrice régulière de dimension m , les systèmes $AX=B$ et $MAX=MB$ sont équivalentes et ils possèdent le même ensemble de solutions.

1.2.2 Introduction à la programmation linéaire

La programmation linéaire a été formulé par George Dantzing en 1947 à ses travaux effectuées durant la deuxième guerre mondiale pour l'US AIR FORCE et a connu un développement rapide. Le développement de l'informatique, des ordinateurs de plus en plus puissants ont permis de traiter avec succès des problèmes concrets de taille importante.

Les domaines d'application de la programmation linéaire sont :

- Les domaines des mathématiques pures et appliquées ou la PL a permis d'obtenir des résultats théoriques.
- Le domaine de l'économie et spécialement l'économie de l'entreprise.
- L'industrie chimique, en particulier l'industrie du pétrole à tous les stades (Recherche, exploitation, production, raffinage, distribution...)
- L'industrie alimentaire ...
- Le transport
- L'agriculture

1.2 Technique de la programmation linéaire

Exemple 1.1 *Problème de répartition de ressources :*

Une usine fabrique trois sortes de pièces (P_1, P_2, P_3) à l'aide de deux machines (M_1, M_2). Chaque pièce en cours de fabrication doit passer successivement sur les deux machines dans un ordre indifférent pendant les temps suivants en minutes.

| <i>machines,pièces</i> | P_1 | P_2 | P_3 | <i>disponibilité en heures</i> |
|------------------------|-----------|-----------|-----------|--------------------------------|
| M_1 | $t_{1,1}$ | $t_{1,2}$ | $t_{1,3}$ | t_1 |
| M_2 | $t_{2,1}$ | $t_{2,2}$ | $t_{2,3}$ | t_2 |
| <i>profit</i> | Π_1 | Π_2 | Π_3 | / |

Combien doit on fabriquer de pièces P_1, P_2, P_3 de manière à avoir un profit maximum ?

A. Formulation

Objectif : Maximiser le profit total.

Contraintes : de ressources du temps, la disponibilité de la machine M_1, M_2 .

Il s'agit de déterminer le nombre de pièces de type P_1, P_2 et P_3 de façon à avoir un profit maximal tout en respectant les contraintes de ressources.

B. Modélisation : Soit x_j ($j=1,2,3$) le nombre de pièces de type j à fabriquer.

Le modèle mathématique :

$$\begin{aligned} \text{Max} Z &= \Pi_1 x_1 + \Pi_2 x_2 + \Pi_3 x_3 \\ \left\{ \begin{array}{l} t_{1,1}x_1 + t_{1,2}x_2 + t_{1,3}x_3 \leq 60t_1 \\ t_{2,1}x_1 + t_{2,2}x_2 + t_{2,3}x_3 \leq 60t_2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \end{array} \right. \end{aligned}$$

1.2.3 Définitions et différentes formes d'un programme linéaire

Un programme linéaire est un problème qui consiste à optimiser (Maximiser ou Minimiser) une fonction linéaire à plusieurs variables soumise à un ensemble de contraintes linéaires. D'une manière générale un programme linéaire s'écrit :

$$\text{Opt}F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

1.2 Technique de la programmation linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n \quad R_1 \quad b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n \quad R_2 \quad b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n \quad R_m \quad b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \in E, \end{array} \right.$$

Avec R_1, R_2, \dots, R_n égalités ou inégalité. Les coefficients c_1, c_2, \dots, c_n sont des réels, de même que les coefficients du système des contraintes a_{ij} ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$). En d'autre terme

$$\text{Opt } F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \quad R_i \quad b_i$$

La forme matricielle :

$$\text{Opt } F = CX$$

$$AX \quad R \quad B$$

1.2.3.1 La forme standard

: On appelle forme standard d'un programme linéaire la forme algébrique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \end{array} \right. \quad b_i \geq 0$$

1.2.3.2 La forme canonique

: On appelle forme canonique d'un programme linéaire la forme algébrique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \end{array} \right.$$

Proposition 1.1 *Tout programme linéaire peut se mettre sous la forme standard ou canonique. En effet, il suffit de remarquer les transformations suivantes :*

1. $\text{Min } f(x) \Leftrightarrow \text{Max } (-f(x))$ et donc $\text{Min } f(x) = - \text{Max } (-f(x))$
2. Lorsque une contrainte n'est pas égalité, supposons que la i^{eme} contrainte est sous la forme suivante :

1.2 Technique de la programmation linéaire

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n \leq b_i$$

On introduit une variable d'écart e_i et on obtient :

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n + e_i = b_i$$

Dans le cas où la $i^{\text{ème}}$ contrainte est sous la forme suivante :

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n \geq b_i$$

On introduit une variable d'écart e_i et on obtient :

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n - e_i = b_i$$

3. Une contrainte égalité

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n = b_i$$

peut être transformée en

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n \leq b_i$$

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n \geq b_i$$

4. Soit un b_i négatif ($b_i \leq 0$)

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n = b_i \quad (b_i \leq 0)$$

On multiplie par (-1) les deux membres de l'équation

$$-a_{i,1} x_1 - a_{i,2} x_2 - \dots - a_{i,n} x_n = -b_i \quad (b_i \leq 0)$$

5. La $i^{\text{ème}}$ variable est quelconque ($x_j \in \mathbb{R}$), il suffit de faire un changement de variable $x_j = x_j^1 - x_j^2$, $x_j^1, x_j^2 \geq 0$.

Exemple 1.2 Mettre sous forme standard et canonique les formes suivantes

$$\text{Min}Z = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 3x_4 \leq 8 \\ 2x_1 - x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1.3 Espace des solutions

Soit le problème de la programmation linéaire mis sous la forme standard :

$$\begin{cases} \text{Max} Z = CX & (i) \\ AX = b, b \geq 0 & (ii) \\ X \geq 0 & (iii) \end{cases} \quad (S)$$

$A = (B, N)$

A est une matrice de dimension $(m \times n)$, $\text{rang}(A) = n$ tq $m < n$. Une solution du programme linéaire est un vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant (ii). Une solution est dite réalisable si elle vérifie (ii) et (iii)

B est une base, soit I l'ensemble des indices des variables correspondants à B . Soit J l'ensemble des indices des autres variables, les m variables associées au vecteur base sont appelées variables de base, les autres variables sont appelées variables hors base.

On posera $X = (X_B, X_H)$.

X_B l'ensemble des variables de base.

X_H l'ensemble des variables hors base.

On note aussi $C = (C_B, C_H)$.

C_B les coefficients des variables de base.

C_H les coefficients des variables hors base.

Alors (S) peut être réécrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Max} Z = C_B X_B + C_H X_H \\ B X_B + H X_H = b \\ X_B \geq 0, X_H \geq 0 \end{cases} \quad (iii)$$

Si $X_H = 0$ alors $B X_B = b \implies B^{-1} B X_B = B^{-1} b \implies X_B = B^{-1} b$. $(B^{-1} b, 0)$ est appelée solution de base de plus si $B^{-1} b \geq 0$ elle est dite solution de base réalisable.

Une solution de base réalisable est dite dégénérée si certaines composantes de X_B sont nulles.

Une solution de base réalisable est dite optimale si elle maximise Z .

1.4 Géométrie de la programmation linéaire

Définition 1.1 Un ensemble \mathbb{C} de \mathbb{R}^n est dit convexe si : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{C}, 0 \leq \lambda \leq 1 \implies \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \mathbb{C}$

Proposition 1.2 L'ensemble des solutions réalisables de (S) est un ensemble convexe.

En effet, soit x_1 et x_2 deux solutions réalisables de (S) alors :
 $A x_1 = b, x_1 \geq 0$ et $A x_2 = b, x_2 \geq 0, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \geq 0$ de plus $A (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = A \lambda x_1 + A (1-\lambda) x_2 = \lambda b + (1-\lambda) b = b \implies \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ est une solution réalisable.

Définition 1.2 Un point x d'un ensemble convexe \mathbb{C} est dit point extrême si x ne peut pas être exprimé comme une combinaison linéaire convexe des autres points de \mathbb{C} .

Définition 1.3 Un hyperplan dans \mathbb{R}^n est l'ensemble suivant :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta, \alpha_i \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Un hyperplan est de dimension $(n-1)$, $\dim(H) = (n-1)$.

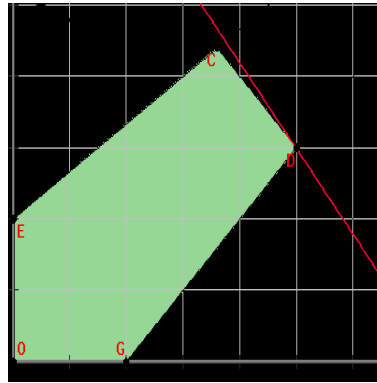
L'ensemble $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \geq \beta, \alpha_i \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un demi espace fermé.

Définition 1.4 L'intersection d'un nombre fini de demi espaces est appelée polyèdre. Un polyèdre non vide est borné est appelé polytope.

Exemple 1.3 Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 6x_1 + 5x_2 \\ &\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

1.4 Géométrie de la programmation linéaire



La forme standard :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 6x_1 + 5x_2 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + e_1 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + e_2 = 6 \\ x_1 - x_2 + e_3 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_0(0,0,8,6,2)$ est une solution de base réalisable. $Z(x_0) = 0$ $D_1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 = 8 \}$
 D_1 est un demi espace fermé. La région réalisable (S) est un polyèdre borné alors polytope.

Proposition 1.3 *L'ensemble de solutions réalisables du programme linéaire standard ou*
 $(S) = \{ x \in \mathbb{R}^n / AX = b \ x \geq 0 \}$ *est un polyèdre convexe fermé.*

Théorème 1.1 *Toute solution de base réalisable de (S) telle que (S) = { x ∈ ℝⁿ / AX = b x ≥ 0 } est un point extrême de (S) est inversement.*

Dans l'exemple 1.3 les points extrêmes sont O, G, D, C, E

Corollaire 1.1 *L'ensemble (S) possède au moins un point extrême.*

1.5 Résolution d'un programme linéaire

Théorème 1.2 Soit (S) un polyèdre convexe fermé et borné $(S) = \{ x \in \mathbb{R}^n / AX = b, x \geq 0 \}$ ayant N points extrêmes s_1, s_2, \dots, s_N . Tout point de (S) s'écrit comme combinaison convexe de ses points extrêmes $\forall x \in S, x = \sum_{j=1}^S \lambda_j s_j, \sum_{j=1}^S \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0$.

Théorème 1.3 La fonction objectif du problème standard (S) atteint son maximum en un point extrême dans l'ensemble de solutions réalisables. Si la fonction objectif atteint son maximum en plusieurs points extrêmes alors cette même valeur est maximale en tout point qui est combinaison linéaire de ces points extrêmes

1.5 Résolution d'un programme linéaire

Il découle des résultats montrés précédemment que la détermination de la solution optimale d'un programme linéaire consiste à le mettre sous sa forme standard et à s'intéresser aux solutions de base réalisables (les points extrêmes). Il est impossible d'énumérer toutes les solutions de base réalisables car si on suppose que $\text{rg}(A) = m (m \leq n)$, le nombre maximum des points extrêmes est : $C_m^n = \frac{(n!)}{m!(n-m)!}$. Pour un problème de grand taille ce nombre est prohibitif il faut d'abord une exploration intelligente (méthode de résolution) ce problème est dit problème combinatoire.

1.6 Résolution graphique d'un programme linéaire

La méthode graphique est simple mais elle ne s'applique que au problème linéaire possédant au plus deux variables. Le principe consiste à représenter le polyèdre convexe, à parcourir tous les sommets de ce polyèdre et à choisir celui qui optimise la fonction objectif alternativement ou trace le faisceau de droite $Z = Z_0$ et on le replace dans le sens du gradient (problème de maximisation) le dernier sommet rencontré est la solution optimale. Dans le cas de l'exemple 1.3 les points extrêmes sont $O(0,0)$, $G(2,0)$, $D(5,3)$, $C(\frac{18}{5}, \frac{22}{5})$, $E(0,2)$. $Z = 6x_1 + 5x_2$, $Z(O) = 0$, $Z(G) = 12$, $Z(D) = 45$, $Z(C) = \frac{218}{5}$, $Z(E) = 10$. La valeur maximale est atteinte en $D(5,3)$.

Exemple 1.4 Une usine fabrique deux produits p_1 et p_2 sur trois machines M_1, M_2 et M_3 . p_1 est fabriqué sur M_1, M_2 alors que p_2 est fabriqué sur les trois machines. Le temps de

1.6 Résolution graphique d'un programme linéaire

séjour de chaque produit sur chaque machinesont donnés

| | M_1 | M_2 | M_3 | <i>profit unitaire</i> |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|------------------------|
| p_1 | <i>0.25</i> | <i>0.4</i> | <i>0</i> | <i>2</i> |
| p_2 | <i>0.5</i> | <i>0.2</i> | <i>0.8</i> | <i>3</i> |
| <i>disponibilité</i> | <i>40 h</i> | <i>40 h</i> | <i>40 h</i> | |

Il s'agit de trouver la solution graphique qui maximise le profit.

Solution :

$$\begin{aligned} \text{Max} Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 40 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 \leq 40 \\ 0.8x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

