

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Abdel Hafid Boussouf – Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département des Sciences et Techniques

Filière: Génie Mécanique

Spécialité : Energétique



POLYCOPIE

Méthodes numériques I ***Méthodes des différences finies***

Ce polycopié est destiné aux étudiants de la 1ère année Master,

Mécanique Energétique

Auteur : Dr. BOUCHOUCHA Abd El malik

(Maître de Conférences B)

Sommaire

Page

CHAPITRE I : Formulation mathématique de l'équation de la conduction de chaleur unidimensionnelle (1-D) et bidimensionnelle (2-D)

I.1 INTRODUCTION.....	1
I- Equation de la conduction de chaleur unidimensionnelle (1-D).....	1
I- 1. Equation de la conduction de chaleur dans une paroi plane large.....	1
I.2 Equation de la conduction de chaleur dans un cylindre long.....	4
I.3. Equation de la conduction de chaleur dans une sphère.....	8
I.4. Equation générale de la conduction de chaleur.....	9
I.5. Conditions aux limites.....	11
I.5.1 Conditions de Dirichlet 'Température imposée'.....	12
I.5.2 Flux imposé 'condition de Neuman'.....	12
I.5.3 Condition aux limites du 3eme type.' Condition de Cauchy.....	12
CHAPITRE I : Classification des équations aux dérivées partielles.	
II.1 Définition.....	15
II.2. Classification mathématique des EDP linéaires du second ordre (cas de deux variables indépendantes) :.....	15
II.3. Classification mathématique dans le cas général (n variables indépendantes).....	16
II.4. Classification physique des EDP.....	17
II.4.1.- Equation de la chaleur.....	17
II.5. Résolution des systèmes d'équations linéaires.....	19
II.5.2. Méthode de Gauss-seidel.....	21
II.5.3 Amélioration de la convergence en utilisant la relaxation.....	24

II.5.4 Méthode de Jacobi.....	24
II.5.5. Méthode de résolution directe	25
II.5.5.1 Méthode d'élimination de Gauss.....	25
II.5.5.2 Algorithme de Thomas (Méthode direct).....	27
Chapitre III : Méthode des différences finies	
III.1 Approximation des opérateurs différentiels.....	31
III.2 Maillage.....	31
III.4 Résumé.....	33
III.5 Etude numérique de la conduction unidimensionnel stationnaire.....	33
Chapitre IV: Discrétisation de l'équation de la conduction de chaleur (2-D)	
IV.2.Discrétisation de l'équation de la conduction de chaleur (2-D) en Régime permanent par la méthode des différences finies.....	39
Chapitre V. Discrétisation de l'équation de la conduction de chaleur en régime transitoire par la méthode des différences finies	
V.1 Discrétisation de l'équation de la conduction de chaleur en régime transitoire par la méthode des différences finies.....	47
V.2.Conduction de chaleur transitoire dans une paroi plane.....	48
V.3. Formulation explicite des différences finies.....	49
V.3. 1 Critères de la stabilité pour la méthode explicite.....	50
a)la Méthode explicite.....	55
b) la Méthode implicite.....	55
V.4.Conduction thermique transitoire 2-D.....	54
I.5.CONCLUSION.....	47

Chapitre 1

FORMULATION MATHÉMATIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CONDUCTION DE CHALEUR UNIDIMENSIONNELLE (1-D) ET BIDIMENSIONNELLE (2-D)

I.1 Introduction

Le processus de transfert de chaleur par la conduction s'appuie sur un milieu matériel sans mouvement de matière est dû à des phénomènes physiques microscopiques (agitation des atomes ou des molécules, flux d'électrons libres...). Il peut être vu comme un transfert d'énergie des particules les plus énergétiques (les particules chaudes qui ont une énergie de vibration élevée) vers les particules les moins énergétiques (les particules froides d'énergie de vibration moins élevée), dû aux collisions entre particules. Dans les solides, le transfert d'énergie peut également se produire sous l'effet du déplacement d'électrons libres dans le réseau cristallin (par exemple pour les métaux). Ainsi les bons conducteurs d'électricité sont en général également de bons conducteurs de la chaleur.

I.2 Equation de la conduction de chaleur unidimensionnelle (1-D)

I.2.1 Equation de la conduction de chaleur dans une paroi plane large :

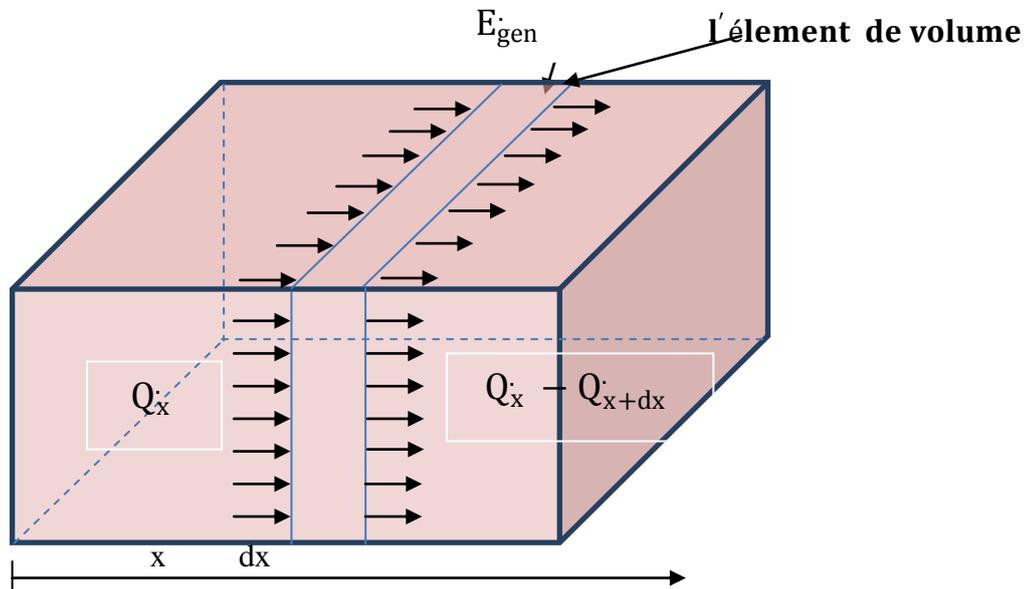


Fig I.1 conduction de chaleur unidimensionnelle à travers un élément de volume dans une paroi plane large.

Nous considérons un élément mince d'épaisseur dx dans une paroi plane et large (Fig I-1) supposé que la densité ρ , de la paroi, la chaleur spécifique est C , et la surface de la paroi normale à la direction du transfert de chaleur est A . En l'absence de

génération de chaleur, un bilan énergétique sur cet élément mince d'épaisseur Δx pendant un petit intervalle de temps Δt peut être exprimé comme

$$\left(\begin{array}{c} \text{Taux de la conduction} \\ \text{de} \\ \text{chaleur à } x \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Taux de la conduction} \\ \text{de} \\ \text{chaleur à } x + dx \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Taux de generation} \\ \text{de} \\ \text{chaleur à l'intérieur} \\ \text{de} \\ \text{l'élément} \\ \text{de volume} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Taux de changement} \\ \text{de} \\ \text{l'énergie contenue dans} \\ \text{l'élément de volume} \end{array} \right)$$

$$Q_x - Q_{x+dx} + E_{gen} \cdot \text{element} = \frac{\Delta E_{\text{élément}}}{\Delta t} \dots \dots \dots (I. 1)$$

$$\Delta E_{\text{élément}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho \cdot dx \cdot A \cdot C \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t) (I. 2)$$

$$\Delta E_{\text{élément}} = e_{gen} \text{ élément} \cdot V_{\text{élément}} = e_{gen} \text{ élément} \cdot A \cdot dx \dots \dots \dots (I. 3)$$

En remplaçant (I. 2) et (I. 3) dans l'équation (I. 1)

$$Q_x - Q_{x+dx} + e_{gen} \text{ élément} \cdot A \cdot dx = \rho \cdot dx \cdot A \cdot C \cdot \left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt} \right) \dots \dots \dots (I. 4)$$

$$e_{gen} = e_{gen} \text{ élément}$$

$$\Delta E_{\text{élément}} = \int e_{gen} \cdot A \cdot dx \dots \dots \dots (I. 5)$$

$$Q_x - Q_{x+dx} + e_{gen} \cdot A \cdot dx = \rho \cdot dx \cdot A \cdot C \cdot \left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt} \right) \dots \dots \dots (1.1)$$

$$-Q_x + Q_{x+dx} + e_{gen} \cdot A \cdot dx = \rho \cdot dx \cdot A \cdot C \cdot \left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt} \right) \dots \dots \dots (1.1)$$

On divise l'équation (I.4) par A.dx

$$-\frac{1}{A} \frac{Q_{x+dx} - Q_x}{dx} + e_{gen} = \rho \cdot C \cdot \left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt} \right) \dots \dots \dots (I. 6)$$

$$\frac{Q_{x+dx} - Q_x}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \cdot A \frac{\partial T}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (I. 7)$$

La loi de fourrier de la conduction de chaleur

Limite $dx \rightarrow 0$

En prenant, $dx \rightarrow 0$, $dt \rightarrow 0$ l'équation (I. 6) devient.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(T_{t+\Delta t} - T_t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(K \cdot A \frac{\partial T}{\partial x} \right) = e_{gen} = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 8)$$

En notant que la surface de la paroi plane est constante. L'équation de la conduction de chaleur transitoire unidimensionnelle (1-D) dans une paroi plane devient

***Conductivité thermique variable**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \cdot A \frac{\partial T}{\partial x} \right) = e_{gen} = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 9)$$

***Conductivité thermique constante**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{e_{gen}}{K} = \frac{\rho \cdot C}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{e_{gen}}{K} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 10)$$

***Régime permanent :**

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{e_{gen}}{K} = 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right] \dots \dots \dots (I. 11)$$

***Régime transitoire pas de génération de chaleur**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 12)$$

Génération de chaleur ($e_{gen} = 0$)

***Régime permanent pas de génération de chaleur**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \dots \dots \dots (I. 13)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0, e_{gen} = 0 \right)$$

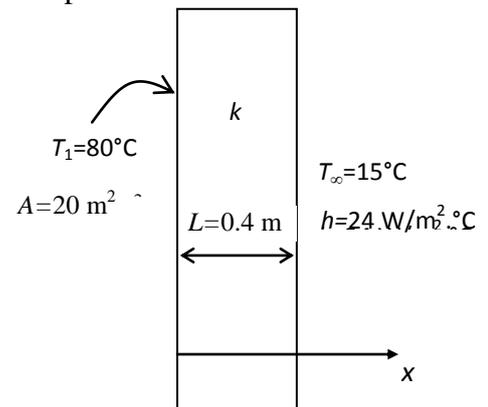
Exemple(I.1)

Une paroi plane large est soumise à une température spécifiée sur la surface gauche et à une convection sur la surface droite. La formulation mathématique, la variation de la température et le taux de transfert de chaleur doivent être déterminés pour un transfert de chaleur unidimensionnel régulier.

Hypothèses

- 1- La conduction thermique est stable et unidimensionnelle. .
- 2 -La conductivité thermique est constante.
- 3- Il n'y a pas de génération de chaleur.

Propriétés La conductivité thermique est donnée comme étant $k = 2,3 \text{ W / m} \cdot ^\circ \text{C}$.



En prenant la direction normale à la surface du mur comme étant la direction x avec $x = 0$ à la surface gauche, la formulation mathématique de ce problème peut être exprimée comme suit:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad \text{Et} \quad T(0) = T_1 = 80^\circ\text{C} \quad -k \frac{dT(L)}{dx} = h[T(L) - T_\infty]$$

(b) Intégration de l'équation différentielle deux fois par rapport aux rendements x

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \quad T(x) = C_1x + C_2$$

Où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. L'application des conditions aux limites donne

$$x = 0: T(0) = C_1 \times 0 + C_2 \rightarrow C_2 = T_1$$

$$x = L: -kC_1 = h[(C_1L + C_2) - T_\infty] \rightarrow C_1 = -\frac{h(C_2 - T_\infty)}{k + hL} \rightarrow C_1 = -\frac{h(T_1 - T_\infty)}{k + hL}$$

En se substituant à la solution générale, la variation de température est déterminée comme :

$$\begin{aligned} T(x) &= -\frac{h(T_1 - T_\infty)}{k + hL}x + T_1 \\ &= -\frac{(24 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(80 - 15)^\circ\text{C}}{(2.3 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}) + (24 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.4 \text{ m})}x + 80^\circ\text{C} \\ &= 80 - 131.1x \end{aligned}$$

(c) Le taux de conduction thermique à travers le mur est

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{wall}} &= -kA \frac{dT}{dx} = -kAC_1 = kA \frac{h(T_1 - T_\infty)}{k + hL} \\ &= (2.3 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C})(20 \text{ m}^2) \frac{(24 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(80 - 15)^\circ\text{C}}{(2.3 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}) + (24 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.4 \text{ m})} = \mathbf{6030 \text{ W}} \end{aligned}$$

Notez que dans des conditions stables, le taux de conduction thermique à travers un mur est constant.

I.2.2 Equation de la conduction de chaleur dans un cylindre long

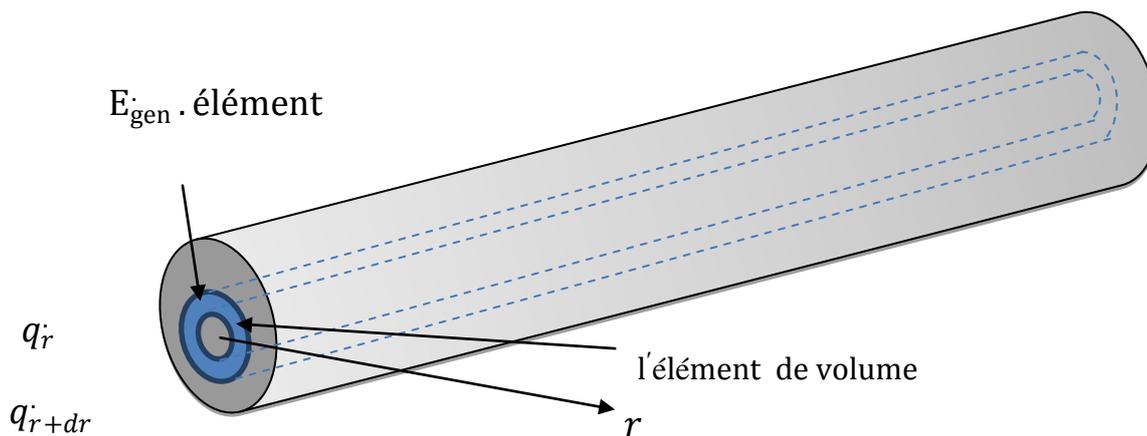


Fig I.2 conduction de chaleur unidimensionnelle à travers un élément de volume dans un cylindre long

On considère un élément de coque cylindrique mince d'épaisseur dr dans un cylindre long. La densité du cylindre est ρ , la chaleur spécifique est C , et la longueur est L . la surface de cylindre à la direction normale de transfert de chaleur à n'importe quel endroit est où r est la valeur du rayon à cet endroit est $A = \pi 2rL$. Notez que la surface de transfert de chaleur A dépend de r dans ce cas, et donc elle varie selon l'emplacement. Un bilan énergétique sur cet élément de coque cylindrique mince d'épaisseur dr pendant un petit intervalle de temps Δt peut être exprimé comme:

En remplaçant l'équation (I, 15) et (I, 16) dans l'Eq (I,14)

$$\left(\begin{array}{c} \text{Taux de la conduction} \\ \text{de} \\ \text{chaleur à } x \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Taux de la conduction} \\ \text{de} \\ \text{chaleur à } x + dx \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Taux de generation} \\ \text{de} \\ \text{chaleur à l'intérieur} \\ \text{de} \\ \text{l'élément} \\ \text{de volume} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{Taux de changement} \\ \text{de} \\ \text{l'énergie contenue dans} \\ \text{l'élément de volume} \end{array} \right)$$

$$Q_{r} - Q_{r+dr} + E_{gen} \cdot \text{élément} = \frac{\Delta E_{\text{élément}}}{\Delta t} \dots \dots \dots \text{(I. 14)}$$

$$\Delta E_{\text{élément}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc (T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho \cdot dr \cdot A \cdot C \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t) \dots \text{(I. 15)}$$

$$\Delta E_{\text{élément}} = e_{gen \text{ élément}} \cdot V_{\text{élément}} = e_{gen \text{ élément}} \cdot A \cdot dr \dots \dots \dots \text{(I. 16)}$$

$$Q_{\dot{r}} - Q_{\dot{r}+dr} + E_{gen} \cdot A \cdot dr = \rho \cdot C \cdot A \cdot dr \cdot \left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt} \right) \dots \dots \dots (I. 17)$$

On divise l'Eq (I,17) par A.dr

$$-\frac{1}{A} \frac{Q_{r+dr} - Q_r}{dr} + e_{gen} = \rho \cdot C \cdot \left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt} \right) \dots \dots \dots (I. 18)$$

Dans la limite, dt → 0, dr → 0, l'équation (I, 18) devient

$$\frac{Q_{r+dr} - Q_r}{dr} = \frac{\partial Q}{\partial r}, \quad \left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt} \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

Et en utilisant la loi de Fourier

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(K \cdot A \frac{\partial T}{\partial r} \right) + e_{gen} = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 19) - (I. 15)$$

La loi de Fourier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{r+dr} - Q_r}{dr} = \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-K \cdot A \frac{\partial T}{\partial r} \right) \dots \dots \dots (I. 20)$$

L'équation de la conduction de chaleur transitoire unidimensionnelle dans un cylindre devient

***conductivité thermique variable**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \cdot r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + e_{gen} = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 21)$$

***Conductivité thermique constante**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{e_{gen}}{K} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 22)$$

$$\left(\alpha = \frac{k}{\rho \cdot C} \right)$$

***Régime permanent**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \cdot r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + e_{gen} = 0 \dots \dots \dots (I. 23)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right)$$

***Régime transitoire pas de génération de chaleur (e_{gen} = 0)**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 24)$$

***Régime permanent pas de génération de chaleur**

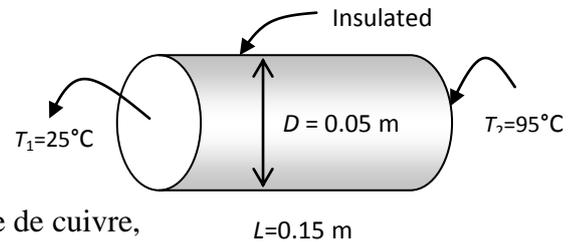
$$\frac{\partial}{\partial r} \left(K \cdot r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \dots \dots \dots (I. 25)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} = e_{gen} = 0 \right)$$

Exemple (I.2)

Les surfaces supérieure et inférieure d'une tige cylindrique solide sont maintenues à des températures constantes de 20°C et 95°C tandis que la surface latérale est

Parfaitement isolée. Le taux de transfert de chaleur



à travers la tige doit être déterminé pour les cas de tige de cuivre,

D'acier et de granit.

Hypothèses

- 1- La conduction thermique est stable et unidimensionnelle. .
- 2 -La conductivité thermique est constante.
- 3- Il n'y a pas de génération de chaleur.

Les propriétés des conductivités thermiques sont données à $k = 380\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$ pour le cuivre, $k = 18\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$ pour l'acier et $k = 1,2\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$ pour le granit.

Notant que la surface de transfert de chaleur (la surface du cylindre à la direction normale du transfert de chaleur) est constante, le taux de transfert de chaleur le long de la tige est déterminé à partir de :

$$\dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{L}$$

Où $L = 0,15\text{ m}$ et la surface de transfert de chaleur A est

$$A = \pi D^2 / 4 = \pi(0.05\text{ m})^2 / 4 = 1.964 \times 10^{-3}\text{ m}^2$$

Ensuite, le taux de transfert de chaleur pour chaque cas est déterminé comme suit:

$$(a) \text{ Le cuivre: } \dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{L} = (380\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C})(1.964 \times 10^{-3}\text{ m}^2) \frac{(95 - 20)^\circ\text{C}}{0.15\text{ m}} = \mathbf{373.1\text{ W}}$$

$$(b) \text{ l'acier: } \dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{L} = (18\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C})(1.964 \times 10^{-3}\text{ m}^2) \frac{(95 - 20)^\circ\text{C}}{0.15\text{ m}} = \mathbf{17.7\text{ W}}$$

$$(c) \text{ granit: } \dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{L} = (1.2\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C})(1.964 \times 10^{-3}\text{ m}^2) \frac{(95 - 20)^\circ\text{C}}{0.15\text{ m}} = \mathbf{1.2\text{ W}}$$

Discussion:

Le taux constant de conduction thermique peut différer de plusieurs ordres de grandeur, selon la conductivité thermique du matériau.

I.2.3 Equation de la conduction de chaleur dans une sphère

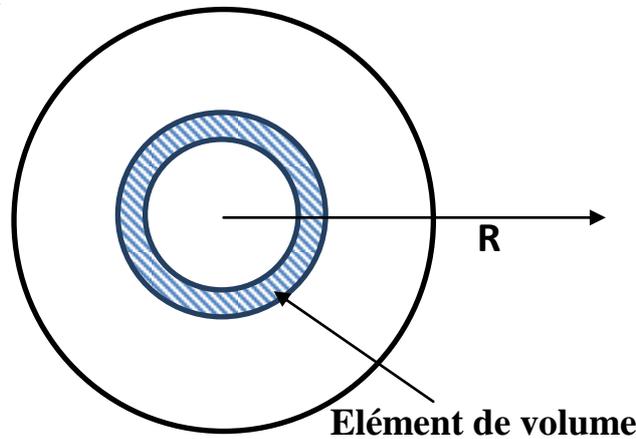


Fig I.3 conduction de chaleur unidimensionnelle à travers un élément de volume d'une sphère.

On considère un mince élément de coque sphérique d'épaisseur dr dans une sphère. La densité du cylindre est ρ , la chaleur spécifique est C et la longueur est L . la surface de sphère à la direction normale de transfert de chaleur à n'importe quel endroit est où r est la valeur du rayon à cet endroit est $A=4\pi r^2$ où r est la valeur du rayon à cet endroit. Notez que la surface de transfert de chaleur A dépend de r dans ce cas, et donc elle varie selon l'emplacement. Lorsqu'il n'y a pas de génération de chaleur. Un bilan énergétique sur cet élément de coque cylindrique mince d'épaisseur Δr pendant un petit intervalle de temps Δt peut être exprimé comme:

En utilisant $A= 4\pi r^2$ ou lien de $A=2\pi rL$.

L'équation de la conduction de chaleur transitoire unidimensionnelle pour une sphère

***conductivité thermique variable :**

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot K \frac{\partial T}{\partial r} \right) + e_{gen} = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 26)$$

***conductivité thermique constante :**

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{e_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 27)$$

$$\left(\alpha = \frac{k}{\rho \cdot C} \right)$$

***Régime permanent**

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot K \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{e_{gen}}{k} = 0 \dots \dots \dots (I. 28)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right)$$

***Régime transitoire pas de génération de chaleur ($e_{gen} = 0$)**

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 29)$$

***Régime permanent pas de génération de chaleur**

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0, e_{gen} = 0 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \dots \dots \dots (I. 30)$$

Ou $r^2 \frac{\partial T}{\partial r} + 2 \frac{dT}{dr} = 0$

I.4. Equation général de la conduction de chaleur

Dans ce paragraphe nous développons l'équation générale gouvernante dans tel système en coordonnées rectangulaire cylindrique et sphérique :

***Coordonnées rectangulaires (cartésiennes)**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + e_{gen} = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 31)$$

***Conductivité thermique constante**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{e_{gen}}{K} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 32)$$

$\left(\alpha = \frac{k}{\rho \cdot C} \right)$ Équation de fourrier

***Régime permanent**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{e_{gen}}{K} = 0 \dots \dots \dots (I. 33)$$

Equation de poisson

***Régime transitoire pas de génération de chaleur**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 34)$$

Équation de diffusion

***Régime permanent pas génération de chaleur :**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} = 0 \dots \dots \dots (I. 35)$$

Equation de la place

***Coordonnées cylindriques**

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k \cdot r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \Phi} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \cdot r \frac{\partial T}{\partial Z} \right) + e_{gen} = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 36)$$

***Coordonnées sphériques**

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k \cdot r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \Phi} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + e_{gen} = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (I. 37)$$

Exemple (I.3)

Un récipient sphérique est soumis à une température spécifiée sur la surface intérieure et à une convection sur la surface extérieure. La formulation mathématique, la variation de la température et le taux de transfert de chaleur doivent être déterminés pour un transfert de chaleur unidimensionnel régulier.

Hypothèses

- 1- La conduction thermique est stable et unidimensionnelle car il n'y a pas de changement avec le temps et il y a une symétrie thermique autour du point médian.
- 2- La conductivité thermique est constante.
- 3- Il n'y a pas de génération de chaleur

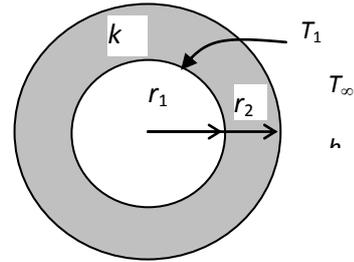
Les propriétés de la conductivité thermique est donnée comme étant $k = 30 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$.

Notant que le transfert de chaleur est unidimensionnel dans la direction radiale r , la formulation mathématique de ce problème peut être exprimée comme suit:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

et $T(r_1) = T_1 = 0^\circ\text{C}$

$$-k \frac{dT(r_2)}{dr} = h[T(r_2) - T_\infty]$$



(b) L'intégration de l'équation différentielle une fois par rapport à r donne

$$r^2 \frac{dT}{dr} = C_1$$

En divisant les deux côtés de l'équation ci-dessus par r pour l'amener à une forme facilement intégrable puis en intégrant,

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Où C1 et C2 sont des constantes arbitraires. L'application des conditions aux limites donne

$$r = r_1: T(r_1) = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 = T_1$$

$$r = r_2: -k \frac{C_1}{r_2^2} = h \left(-\frac{C_1}{r_2} + C_2 - T_\infty \right)$$

Résoudre pour donne simultanément

$$C_1 = \frac{r_2(T_1 - T_\infty)}{1 - \frac{r_2}{r_1} - \frac{k}{hr_2}} \quad \text{and} \quad C_2 = T_1 + \frac{C_1}{r_1} = T_1 + \frac{T_1 - T_\infty}{1 - \frac{r_2}{r_1} - \frac{k}{hr_2}} \frac{r_2}{r_1}$$

En se substituant à la solution générale, la variation de température est déterminée comme étant

$$\begin{aligned} T(r) &= -\frac{C_1}{r} + T_1 + \frac{C_1}{r_1} = C_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) + T_1 = \frac{T_1 - T_\infty}{1 - \frac{r_2}{r_1} - \frac{k}{hr_2}} \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2}{r} \right) + T_1 \\ &= \frac{(0 - 25)^\circ\text{C}}{1 - \frac{2.1}{2} - \frac{30 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}}{(18 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(2.1 \text{ m})}} \left(\frac{2.1}{2} - \frac{2.1}{r} \right) + 0^\circ\text{C} = 29.63(1.05 - 2.1/r) \end{aligned}$$

(c) Le taux de conduction thermique à travers le mur est

$$\dot{Q} = -kA \frac{dT}{dx} = -k(4\pi r^2) \frac{C_1}{r^2} = -4\pi k C_1 = -4\pi k \frac{r_2(T_1 - T_\infty)}{1 - \frac{r_2}{r_1} - \frac{k}{hr_2}}$$

$$= -4\pi(30 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}) \frac{(2.1 \text{ m})(0 - 25)^\circ\text{C}}{1 - \frac{2.1}{2} - \frac{30 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}}{(18 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(2.1 \text{ m})}} = \mathbf{23,460 \text{ W}}$$

I.3 Conditions aux limites

Une des caractéristiques des équations de type elliptique c'est qu'ils nécessitent des conditions aux limites aux frontières du domaine d'étude. Nous présentons en ce qui suit les conditions aux limites spécifiques à l'équation de l'énergie. Il existe 03 types de conditions aux limites.

I.3.1 Conditions de Dirichlet 'Température imposée'

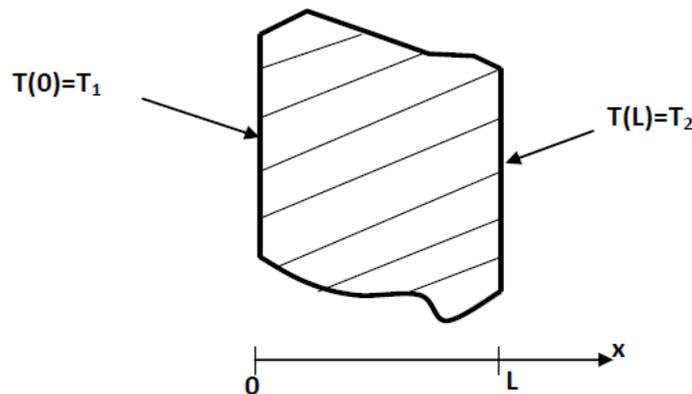


Figure I.4 Conditions aux limites du 1er type.

La valeur de la grandeur à déterminer est connue aux différentes limites (frontières) de la géométrie du domaine d'étude. Cette condition aux limite est facile à programmer, par contre il est difficile de maintenir tout une surface à une température fixe au laboratoire.

I.3.2 Flux imposé 'condition de Neuman'

Aux frontières la densité du flux est connue (voir figure I.5) lorsque la paroi est isolée le flux thermique dans ce cas est nul. Cette condition est très facile à mettre en œuvre au laboratoire.

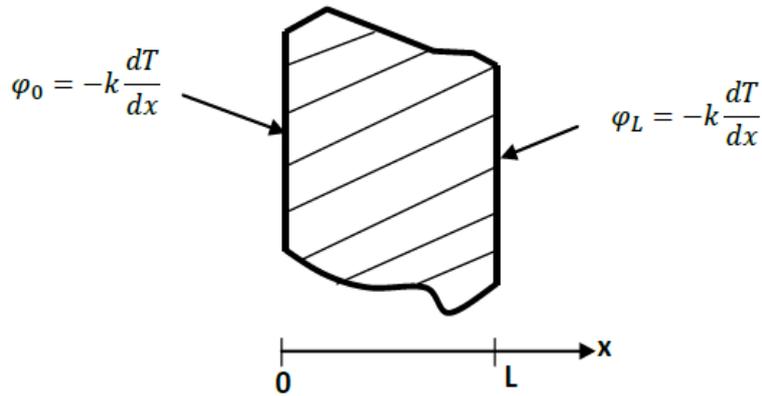


Figure I.5 Conditions aux limites du 2^{er} type.

I.3.3 Condition aux limites du 3eme type.' Condition de Cauchy

Lorsque les frontières du domaine d'étude sont en contact avec un fluide en mouvement dont on connaît le coefficient convectif et la température, la condition aux limites imposée dans ce cas est la continuité des flux convectif et diffusif à l'interface (frontière solide/fluide).

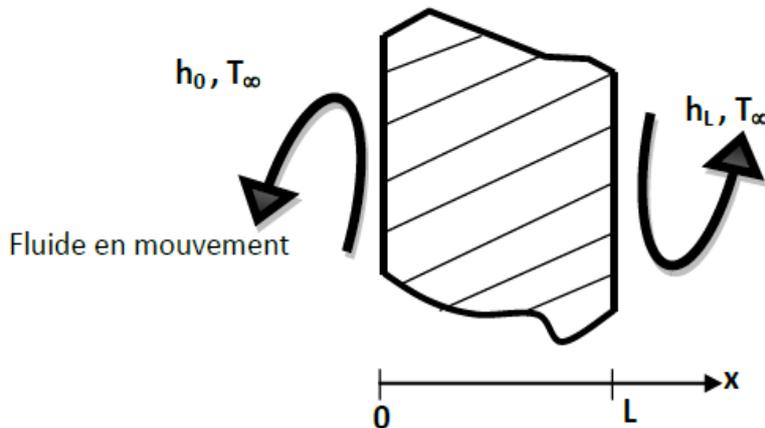


Figure I.6 Conditions aux limites du 3^{er} type.

La condition à l'interface limite s'écrit comme suit :

A $x = 0$ flux convectif = flux diffusif

L'expression de la densité du flux convectif est donnée par la loi de refroidissement de Newton :

$$Q \text{ ou } \Phi_0 = h_0(T_0 - T_\infty) \dots \dots \dots (I.38)$$

L'expression du flux diffusif est donnée par la loi de Fourier :

$$Q \text{ ou } \Phi_0 = -k \frac{\partial T}{\partial x} \dots \dots \dots (I.39)$$

A l'interface

$$\Phi_0 = -k \frac{\partial T}{\partial x} = h_0 (T_0 - T_\infty) \dots \dots \dots (I. 40)$$

Noter qu'à partir de la relation (I. 40) on détermine le nombre de Nusselt comme suit :

$$N_u = \frac{h_0 L_C}{k} \dots \dots \dots (I. 41)$$

Avec :

LC : longueur caractéristique.

Donc en réécrivant l'équation (I. 41), on aura :

$$\frac{h_0}{K} = \frac{-\frac{dT}{dx}}{(T_0 - T_\infty)} \dots \dots \dots (I. 42)$$

Multipliant les deux membres de l'équation (I. 42) par la longueur caractéristique LC

$$N_u = \frac{h_0 L_C}{k} = \frac{-\frac{dT}{dx} L_C}{(T_0 - T_\infty)} \dots \dots \dots (I. 43)$$

Chapitre II

CLASSIFICATION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.

II.1 Définition :

*Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation faisant intervenir les variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n , la fonction f et ses dérivées partielles. Par exemple, si f est une fonction de deux variables, une EDP peut s'écrire par la relation :

$$F\left(x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \dots\right) \dots \dots \dots \text{(II. 1)}$$

* On appelle ordre de l'EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP, par exemple :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} + f + C = 0 \text{ est d'ordre } 3 \dots \dots \dots \text{(II. 2)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - c = 0 \text{ Est d'ordre } 2 \dots \dots \dots \text{(II. 3)}$$

L'EDP est dite linéaire si F est linéaire par rapport à ses arguments f et ses dérivées partielles, et si les coefficients qui les lient ne dépendent que de (x, y) ; sinon elle est non linéaire. Par exemple, l'EDP du second ordre :

$$a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + a_4 \frac{\partial f}{\partial x} + a_5 \frac{\partial f}{\partial y} + a_6 f + a_7 = 0 \dots \dots \dots \text{(II. 4)}$$

Est linéaire si les a_i ne dépendent que de (x, y) .

II.2. Classification mathématique des EDP linéaires du second ordre (cas de deux variables indépendantes) :

$$A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial xy} + C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z} + D \frac{\partial \Phi}{\partial x} + E \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y} + E \Phi + G(x, y) = 0 \dots \dots \dots \text{(II. 5)}$$

Généralement les équations ou dérivées partielles sont classées en trois catégories appelées : elliptique, parabolique, hyperbolique.

pour illustrer cette classification nous considérons l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à deux variables indépendantes x, y donnée par Forsyth et Asonen 1967. Ici nous supposons une équation linéaire où A, B, C, D, E et F sont des fonctions de (x, y) mais ne dépend pas de la variable Φ

La variable Φ = Température, pression, densité ou vitesse.

L'équation (1) dépend de A, B, C, D, E, F .

L'équation aux dérivées partielles de (1) en un point (x, y) est appelée :

Lorsque la quantité $\Delta = (b^2 - 4ac) < 0$ l'équation (2) est dite du type elliptique.

* Lorsque la quantité $\Delta = (b^2 - 4ac) = 0$ l'équation (2) est dite du type parabolique.

* Lorsque la quantité $\Delta = (b^2 - 4ac) > 0$ l'équation (2) est dite du type hyperbolique

Cette classification est purement mathématique, une particularité des équations de type elliptique c'est qu'elles nécessitent des conditions aux limites à toutes les frontières du domaine d'étude.

II.3. Classification mathématique dans le cas général (n variables indépendantes) :

Si f est une fonction de n variables indépendantes, les EDP linéaires du second ordre sont du type :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n) f + d(x_1, \dots, x_n) = 0 \dots \dots \dots (II.6)$$

- * Si tous les a_i sont non nuls et de même signe, l'EDP est de type elliptique.
- * Si tous les a_i sont non nuls et sont ; à une exception près, de même signe, l'EDP est de type hyperbolique.
- * Si un seul des a_i est nul (noté a_{i_0} et tous les autres de même signe et si b_{i_0} est non nul, l'EDP est de type parabolique.

Les fonctions a_i et b_i étant dépendantes des variables (x_1, \dots, x_n) , la classification est évidemment

Fonction du point (x_1, \dots, x_n) considéré. Une EDP peut donc être de différents types suivant les points considérés : on dit qu'elle est de type mixte.

Exemples (II.1) : soient (x, y) une fonction de deux variables et (x, y, t) une fonction de trois variables.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \text{ Est une EDP elliptique.}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \text{ Est une EDP hyperbolique}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \text{ Est une EDP parabolique}$$

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Elliptique pour } x > 0$$

Hyperbolique $x < 0$

Parabolique $x = 0$

II.4. Classification physique des EDP :

De nombreux phénomènes physiques se rangent dans l'une des classes suivantes :

*Les problèmes d'équilibre étudient l'état stationnaire d'un phénomène (champ, chaleur.....) dans un domaine borné ou non. Ils sont gouvernés par l'EDP elliptiques.

*Les problèmes de valeurs propres sont en général des extensions des problèmes d'équilibre dans lesquels les valeurs critiques de certains paramètres doivent être déterminées. C'est le cas par exemple de la résonance des circuits électriques.

*Les problèmes d'évolution étudient l'évolution avec le temps d'un phénomène (champ, chaleur, vibration,...) à partir d'un état initial donné. Ils sont gouvernés par des EDP hyperboliques ou des EDP paraboliques.

II.4.1.- Equation de la chaleur :

La conduction thermique à l'intérieur d'un domaine D bidimensionnel provoque un changement de la température (t, x, y) , qui régit, en l'absence de source de chaleur par l'EDP :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \dots \dots \dots \text{ (II. 7)}$$

Où k, ρ, c sont respectivement la conductivité thermique, la masse volumique et la chaleur spécifique du solide constituant le domaine D.

Lorsque k dépend seulement de la position (x, y) , l'EDP est linéaire; si k dépend de la température T , l'EDP est non linéaire.

Dans la majorité des cas rencontrés, on considère k comme constante et l'équation de la chaleur peut être sous la forme:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) = \alpha \Delta T \dots \dots \dots \text{ (II. 8)}$$

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \text{ désigne le laplacien de } T$$

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ est le coefficient de T

De manière générale, si T dépend de n variables d'espace (x_1, \dots, x_n) on a :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}$$

Tous les problèmes de diffusion sont régis par ce type d'équations.

Exemples(II.2):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + e_{gen} = \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (1.31)$$

-2-D bidimensionnelle (\mathbf{x}, \mathbf{y}) $\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0$

- Régime permanent $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

- Pas génération de chaleur $e_{gen} = 0$

Propriétés constante (k=cte)

L'équation de la place qui est elliptique (1.31)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} = 0 \quad K = cte$$

$$A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial xy} + C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z} + D \frac{\partial \Phi}{\partial x} + E \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y} + E \Phi + G(x, y) = 0$$

$\Delta = (b^2 - 4.a.c) = -4 < 0, A=1, B=0, C=1$ l'équation elliptique

L'équation de la conductivité de chaleur avec la génération de chaleur

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{e_{gen}}{k} = 0.$$

Laquelle est une équation elliptique

La caractéristique de l'équation elliptique, laquelle est exige la spécifique des conditions au limite appropriées sur toutes les limites.

* les équations de la conduction thermique en régime variable (transitoire) sans génération de chaleur avec K= cet.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Équation parabolique unidimensionnelle (1-D)}$$

$$A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial xy} + C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z} + D \frac{\partial \Phi}{\partial x} + E \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y} + E \Phi + G(x, y) = 0$$

A=0 B=0 C=0 Δ=0

L'équation d'ordre deux 2^{eme} Ordre

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

La matrice dans la figure (II.1) a n rangées et m colonnes ayant une dimension de n par m (ou n x m) elle est appelée n x m

Les matrices où n=1 $[B]=[b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m]$ est appelée vecteurs rangées

- les matrices où m=1

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

- les matrices où n=m sont appelées matrices carrées par exemple une matrice u par u

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

*une matrice symétrique

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

a_{ij} Les éléments de la matrice, i désigne la lecture des éléments dans la direction horizontale, et j la lecture des éléments dans la direction verticale.

- **une matrice triangulaire supérieure**

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

- **une matrice triangulaire inférieure**

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- une matricé d'identité

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- une matricé tri-diagonale à la forme suivante:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

II.5.1. Méthode de Gauss-seidel :

Quand le nombre d'équation est très large une méthode itérative préfère à la méthode directe de solution.

-la Méthode itérative converger bien pour un système d'équation ayant une diagonale dominante (pas de zéro) parmi les Méthode itérative ,on a la méthode de (gauss-seidel),cette Méthode est très utilisée par apport à autre méthodes itératives.

*supposer que nous avons un système d'équation de n équations

$$[A][X] = \{B\}$$

*prenons n=3, un système d'équation de 3X3

*Si les éléments de la diagonale sont tous nuls

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \{B\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

- le système d'équation (n=3)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \dots \dots \dots (II. 12)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

La première équation peut être résolue pour x_1

La deuxième équation peut être résolue pour x_{21}

La troisième équation peut être résolue pour x_3

$$\Rightarrow x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \dots \dots \dots (II. 13. a)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \dots \dots \dots (II. 13. b)$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \dots \dots \dots (II. 13. c)$$

Maintenant nous pouvons commencer la procédure de solution on choisit les valeurs estimées x_1, x_2, x_3 .

Une méthode simple pour obtenir les estimations initiales et de supposer que des valeurs x_2, x_3 sont nulles ces zéros sont remplacés de (II.13-a) pour calculer $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$. alors nous remplaçons cette valeur de x_1 dans l'équation de (II.13-b) pour calculer la nouvelle valeur de x_2 .

La procédure est répétée pour l'équation (II.13.c) pour calculer une nouvelle estimation pour x_3 .

Ainsi nous retournons à la première équation est répété la procédure jusqu'à votre solution converge assis près des valeurs critères.

- la convergence peut être vérifiée en utilisant le critère suivant :

$$|\epsilon_i| = \left| \frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j} \right| < \epsilon_i$$

pour tout $i(x_i, i=1, \dots, n)$

j et $j-1$ sont respectivement la présente et la précédente itérations.

Exemple (II.3)

Utiliser la méthode de Gauss-seidel pour obtenir la solution du système d'équation suivant :

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3 \dots \dots \dots (II. 14)$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

Sachant que la solution exacte est $x_1 = 3, x_2 = 2.5$, et $x_3 = 7$

Estimer $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{7.85 - 0.1x_2 - 0.2x_3}{3} \dots \dots \dots (II. 14. a)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7} \dots \dots \dots (II. 14. b)$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 - 0.2x_2}{10} \dots \dots \dots (II. 14. c)$$

L'équation(II.14.a) $x_1 = \frac{7.85 + 0 + 0}{3} = 2.6166$

Cette valeur avec $x_3=0$ est remplacée à l'équation (II.14.b) pour calculer

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.6166) + 0}{7} = -2.7945$$

La première itération est terminée, en remplaçant la valeur de x_1 et x_2 dans l'équation (II.14.c) pour obtenir x_3

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.6166) - 0.2(-2.7945)}{10} = 7.0056.$$

Pour la 2^{ème} itération la même

$$|\varepsilon_i| = 0.31\% \quad x_1 = \frac{7.85 - 0.1(-2.7945) + 0.2(7.0056)}{3} = 2.9905$$

$$|\varepsilon_i| = 0.015\% \quad x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.9905) + 0.3(7.0056)}{7} = -2.49962$$

$$|\varepsilon_i| = 0.0012 \quad x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.990557) + 0.2(-2.49962)}{10} = 7.0002$$

La méthode est, par conséquent, convergée vers la solution exacte des itérations en plus peuvent être appliquées pour améliorer la solution.

II.5.2 Amélioration de la convergence en utilisant la relaxation :

La relaxation est une légère modification de la méthode de Gauss-Seidel et elle est désignée pour augmenter la convergence, donnée par la relation suivante :

$$x_i^{Ne} = \lambda x_i^{Ne} + (1 - \lambda)x_i^{old}$$

λ : facteur de relaxation, $0 < \lambda < 2$

Si $0 < \lambda < 1$ \Rightarrow sous relaxation

Si $1 < \lambda < 2$ \Rightarrow sur relaxation

Si $\lambda = 1$ la méthode est dite Gauss-Seidel

II.5.3 Méthode de Jacobi

Exemple : soit le système suivant :

*le système d'équation (n=3)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \dots \dots \dots (II. 15)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

La première équation peut être résolue pour x_1

La deuxième équation peut être résolue pour x_2

La troisième équation peut être résolue pour x_3

$$\Rightarrow x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \dots \dots \dots (II. 15. a)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \dots \dots \dots (II. 15. b)$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \dots \dots \dots (II. 15. c)$$

Maintenant nous pouvons commencer la procédure de solution on choisit les valeurs estimées x_1, x_2, x_3 .

Une méthode simple pour obtenir les estimations initiales est de supposer que des valeurs x_2, x_3 sont nulles ces zéros sont remplacés de (15-a) pour calculer $x_1 =$

$\frac{b_1}{a_{11}}$. alors nous remplaçons cette valeur de x_1 dans l'équation de (2.15-b) pour calculer la nouvelle valeur de x_2 .

La procédure est répétée pour l'équation (15.c) pour calculer une nouvelle estimation pour x_3 .

A la 1ère itération on donne des valeurs initiales à x_1, x_2, x_3 , soit ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$), on obtient x_1, x_2, x_3 ensuite on passe à la 2ème itération (itération 2), on calcule x_1, x_2, x_3 à partir de (x_1, x_2, x_3) de 1ère itération et ainsi de suite jusqu'à la convergence :

II.5.4. Méthode de résolution directe :

Le problème essentiel de la méthode directe est la place mémoire. Cette méthode présente des avantages et des inconvénients par rapport à la méthode itérative :

***Avantage :**

- Le temps de calcul en général plus petit pour une même précision ;
- Dans certains cas la méthode itérative peut ne pas converger.

***Inconvénients :**

- Occupation mémoire importante ;
- Risque d'erreur d'arrondis importante si certains pivots sont trop petit ;
- La méthode directe n'est pas applicable aux équations non linéaires.

II.5.4.1 Méthode d'élimination de Gauss :

Soit le système donné sous cette forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & \cdots & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \dots\dots\dots (II. 16)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$A. X = b$

La méthode consiste à transformer la matrice **A** en une matrice triangulaire supérieure **S**, le vecteur **b** subit les mêmes opérations et devient **b'**

$$S \cdot X = b'$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}$$

Exemple (II.4) : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 \dots\dots (1) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11 \dots\dots (2) \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Etape 1 : Elimination de x_1 des équations (2) et (3)

$$eq_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot eq_1 = eq_2 - \frac{1}{3} \cdot eq_1$$

$$eq_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot eq_1 = eq_3 - \frac{1}{3} \cdot eq_1$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 & (1) \\ 0 \cdot x_1 + 2.33x_2 + 2.33x_3 = 7 & (2') \\ 0x_1 - 1.33x_2 - 2.33x_3 = -6 & (3') \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2.33 & 2.33 \\ 0 & -1.33 & -2.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Etape 2 : Elimination de x_3 des équations (3')

$$eq_{3'} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} \cdot eq_{2'} = eq_{3'} - \frac{(-1.33)}{2.33} \cdot eq_{2'}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 & (1) \\ 0 \cdot x_1 + 2.33x_2 + 2.33x_3 = 7 & (2') \\ 0x_1 - 0x_2 - x_3 = -2 & (3'') \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2.33 & 2.33 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Etape 3 : substitution en arrière

De l'équation (3'') on obtient

$$x_3 = 2$$

De (2') on obtient :

$$2,33x_2 + 2,33x_3 = 7$$

$$x_2 = 1$$

De (1) on obtient :

$$x_1 = (12 + x_2 - 2x_3) / 3$$

$$x_1 = 3$$

II.5.5.2 Algorithme de Thomas (Méthode direct)

Considérer un système de N équation algébrique le coefficient de la matrice tri diagonal est les suivants

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

1^{ère} étape :

La première équation (Eq(1)) est choisie comme 'pivot '

Multipliée $x \frac{a_2}{b_1}$. (Eq(1) $x \frac{a_2}{b_1}$) est soustrait à partir de la deuxième équation (Eq(2)) pour éliminer a_2 de l'équation (Eq(2))

$$\text{Nouveaux } a_2 = a_2 - \left[\frac{a_2}{b_1} \right] x b_1 = 0$$

$$\text{Nouveaux } b_2 = b_2 - \left[\frac{a_2}{b_1} \right] x c_1 = 0$$

$$\text{Nouveaux } d_2 = d_2 - \left[\frac{a_2}{b_1} \right] x d_1 = 0$$

2^{ere} étape :

La deuxième équation Eq (2) modifiée

Est choisie comme pivot, une approche similaire est suivie pour éliminer, a_3

$$\text{Nouveaux } a_3 = 0$$

$$\text{Nouveaux } b_3 = b_3 - \left[\frac{a_3}{b_2} \right] \times C_2 = 0$$

$$\text{Nouveaux } d_3 = d_3 - \left[\frac{a_3}{b_2} \right] \times d_2 = 0$$

3^{ere} étape :

La procédure est continue jusqu'à a_N est éliminé ($a_N=0$)

De la dernière équation Eq(N)

En générale :

$$\text{Remplacer } b_i \text{ par } b_i - \left[\frac{a_i}{b_{i-1}} \right] \times C_{i-1} = 0 \quad \text{pour } i=2,3,\dots,N$$

$$\text{Remplacer } d_i \text{ par } d_i - \left[\frac{a_i}{b_{i-1}} \right] \times d_{i-1} = 0 \quad \text{pour } i=2,3,\dots,N$$

les inconnues $T_i (T_1, T_2, T_3, \dots, T_N)$ sont calculés par substitution, en arriérée commençant de la dernière équation :

$$T_N = \frac{d_N}{b_N}$$

$$T_i = \frac{d_i - C_i \times T_{i-1}}{b_i}, \quad i=N-1, N-2, \dots$$

Exemple (II.5): considère de système suivant une matrice à coefficient tri diagonale

Résoudre le système avec la méthode de thomas.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -T_1 + T_2 = \\ T_1 - T_2 + T_3 = -30 \\ T_2 + 2T_3 + T_4 = \\ T_3 + 2T_4 = \end{cases}$$

Appliquons les équations (2.14a) et (2.14b)

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Remplacer bi par :

$$b_i - \left(\frac{a_i}{b_{i-1}}\right) c_{i-1}$$

$$\begin{cases} b_1 = -1 \\ b_2 = -2 - \left(\frac{1}{-1}\right) X_1 = -1 \\ b_3 = -2 - \left(\frac{1}{-1}\right) X_1 = -1 \\ b_4 = -2 - \left(\frac{1}{-1}\right) X_1 = -1 \end{cases}$$

Remplacer di par : $d_i - \left(\frac{a_i}{b_{i-1}}\right) d_{i-1}$, $i=2, 3, 4$

$$\begin{cases} d_1 = -1 \\ d_2 = -30 - \left(\frac{1}{-1}\right) X - 40 = -70 \\ d_3 = -30 - \left(\frac{1}{-1}\right) X - 70 = -100 \\ d_4 = -30 - \left(\frac{1}{-1}\right) X - 100 = -130 \end{cases}$$

Appliquons l'Eq 2.20 pour calculer :

$$T_1, \quad T_2, T_3, T_4$$

$$T_4 = \frac{d_4}{b_4} = \frac{-130}{-1} = 130$$

$$T_3 = \frac{d_3 - C_3 * T_4}{b_3} = \frac{-100 - 1 * 130}{-1} = 230$$

$$T_2 = \frac{d_2 - C_2 * T_3}{b_3} = \frac{-70 - 1 * 230}{-1} = 300$$

$$T_1 = \frac{d_1 - C_1 * T_2}{b_3} = \frac{-40 - 1 * 300}{-1} = 340$$

III. Méthode des différences finies

C'est une méthode d'approximation des équations. On cherche une solution exacte à partir de la discrétisation des opérateurs différentiels $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2})$ sur un maillage.

III.1 Approximation des opérateurs différentiels.

Le développement autour du point i (dans le maillage) d'une grandeur quelconque donne

$$\Phi_{i-1} = \Phi_i - \frac{1}{1!} \Delta x \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i - \frac{1}{3!} \Delta x^3 \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + \dots \dots \dots \text{(III. 1)}$$

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + \frac{1}{1!} \Delta x \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i + \frac{1}{3!} \Delta x^3 \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + \dots \dots \dots \text{(III. 2)}$$

Sachant que $\Delta x = h_{i+1} - h_i = \text{cts} \dots \dots \dots \text{(III. 3)}$

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x} + \dots \dots \dots \text{(III. 5)}$$

Ce qui signifie que la dérivée d'ordre 1, au point i, est approchée par différences finies régressives d'ordre 1.

En retenant les premiers deux termes du développement de la relation (3.2) on obtient

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x} + \dots \dots \dots \text{(III. 6)}$$

Ce qui signifie que la dérivée d'ordre 1, au point i, est approchée par différences finies progressives d'ordre 1.

En soustrayant la relation (III. 1) de la relation (III. 2) on obtient l'approximation par différences finies centrées d'ordre 2

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{\Delta x} + \dots \dots \dots \text{(III. 7)}$$

En additionnant les relations (III. 1) et (III. 2) on obtient l'approximation de la dérivée de deuxième ordre par différences finies centrées d'ordre 2.

$$\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i = \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} + \dots \dots \dots \text{(III. 8)}$$

III.2 Maillage

Positionner des nœuds où seront stockées des différentes grandeurs à étudier dans le domaine d'étude.

III.2.1 Maillage structuré et non-structuré

Ces maillages sont présentés dans la figure suivante, Les avantages et les inconvénients des deux maillages sont :

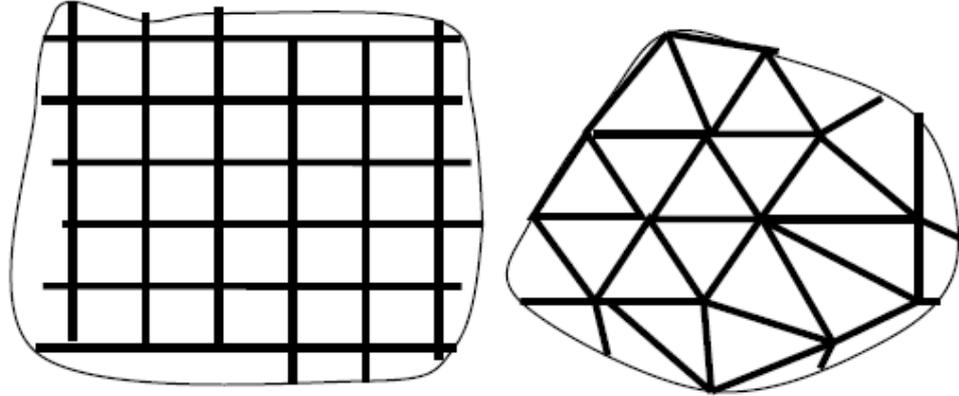


Figure III.1 Maillage structuré et non-structuré

Le maillage structuré est simple à mettre en œuvre, par contre, il est limité pour des géométries simples. Le maillage non-structuré est très compliqué à mettre en œuvre (utilisation des logiciels commerciaux comme Gambit, Catia..). Il est utilisé pour les géométries complexes comme le corps humain (étude de la portance et de la trainée générées par les nageurs), écoulement autour des ailes d’avion, aubes...

Nous utilisons en ce qui suit des maillages structurés.

III.3 Génération du maillage structuré

III.3.1 Maillage régulier

C’est un maillage où la distance entre les différents nœuds est constante. Il est facile à mettre en œuvre.

III.3.1.1 Procédure

On fixe le nombre de nœuds n (cas unidimensionnel) pour le cas bidimensionnel, on fixe n et m .

Calculer la distance entre les nœuds par la relation suivante

$$\Delta x = \frac{L}{n - 1} \dots \dots \dots (III. 9)$$

On utilise ce type de maillage lorsque la variable à déterminer dans le domaine d’étude varie faiblement.

III.3.2 Maillage irrégulier

Recommander si la variable varie fortement dans le domaine d'étude, dans ce cas, il est préférable de raffiner le maillage dans certaines zones où les gradients varient fortement afin de capter au mieux l'information.

III.3.2.1 Procédure

Fixer le nombre de nœuds selon la direction où la variable à déterminer varie fortement

Calculer le premier pas selon la somme d'une suite géométrique définie comme suit :

$$\Delta x(1) = L \left(\frac{1-r}{1-r^{n-1}} \right) \dots \dots \dots (III. 10)$$

Les autres pas sont déterminés par l'expression suivante :

$$\Delta x(i + 1) = \Delta x(i) \cdot r^{n-1} \dots \dots \dots (III. 11)$$

Avec

r: Raison de la suite géométrique (généralement $0.8 < r < 1.2$) pour obtenir une solution stable.

L : longueur du domaine à discrétiser.

III.4 Résumé

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies, on procède comme suit :

- 1- Mailler le domaine d'étude
- 2- Discrétiser les équations ainsi que les conditions aux limites
- 3- Constituer le système d'équation globale
- 4- Résoudre ce système

III.5 Etude numérique de la conduction unidimensionnelle stationnaire

III.5.1 Exemple 1

Soit une barre de longueur L. les températures aux bouts de celle-ci sont $T(0) = 10^\circ\text{C}$ et $T(L) = 50^\circ\text{C}$. Déterminer les températures aux points $x = \frac{L}{4}, \frac{L}{2}$ et $\frac{3L}{4}$

Solution

1/ maillage

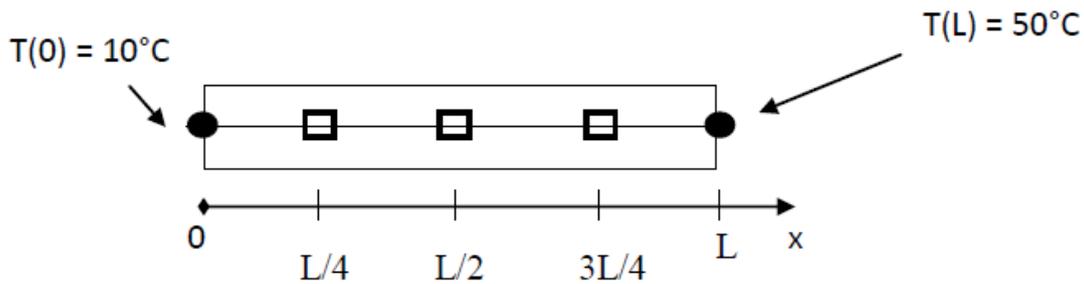


Figure III.2 Géométrie du problème.

Le nombre de nœuds est $n=5$

2/ Modèle mathématique.

L'équation de la pure conduction en 1-D stationnaire est :

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \\ T(0) = 10^\circ\text{C} \\ T(L) = 50^\circ\text{C} \end{cases}$$

Le modèle mathématique comporte les équations qui régissent le phénomène physique ainsi que les conditions aux limites imposées.

3/ discrétisation:

L'opérateur différentiel du deuxième ordre est évalué par le développement en série de Taylor, on obtient :

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2}$$

Noter que cette équation est valable uniquement aux nœuds internes.

Construction du système d'équation

$$\begin{cases} i = 2 & T_1 - 2T_2 + T_3 = 0 \\ i = 3 & T_2 - 2T_3 + T_4 = 0 \\ i = 4 & T_3 - 2T_4 + T_5 = 0 \end{cases}$$

La discrétisation des conditions aux limites donne :

$$\begin{aligned} T_1 &= 10^\circ\text{C} \\ T_5 &= 50^\circ\text{C} \end{aligned}$$

L'écriture du système d'équation pour tous les nœuds donne :

$$\begin{cases} T_1 = 10 \\ T_1 - 2T_2 + T_3 = 0 \\ T_2 - 2T_3 + T_4 = 0 \\ T_3 - 2T_4 + T_5 = 0 \\ T_5 = 50 \end{cases}$$

Mise sous forme matricielle elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

La matrice associée aux systèmes est tri-diagonales, on utilise l'algorithme de Thomas [1] pour obtenir la solution.

On obtient finalement :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

III.5.2 Exemple 2

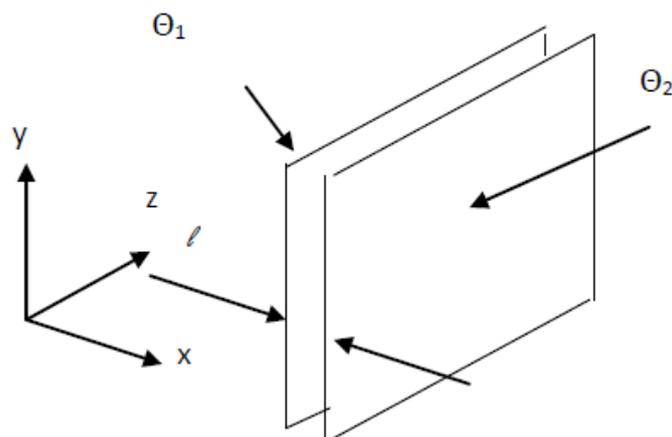


Figure III.3 : Géométrie du problème.

Solution :

Le modèle mathématique du présent exemple est :

$$\begin{cases} k \frac{d^2 T}{dx^2} + q = 0 \\ T(0) = 100^\circ \text{C} \\ T(L) = 200^\circ \text{C} \end{cases}$$

L'équation de la pure conduction en 1-D stationnaire avec source interne. La discrétisation du modèle mathématique donne :

$$k \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} + q_i = 0$$

Comme le chauffage est homogène q_i est constant dans tout le domaine d'étude, Le système d'équations obtenu pour tous les nœuds est :

$$\begin{cases} T_1 = 100 \\ T_1 - 2T_2 + T_3 = -\frac{q_2 \Delta x^2}{k} \\ T_2 - 2T_3 + T_4 = -\frac{q_2 \Delta x^2}{k} \\ T_3 - 2T_4 + T_5 = -\frac{q_2 \Delta x^2}{k} \\ T_5 = 200 \end{cases}$$

Noter que

$$q_2 = q_3 = q_4 = 1000 \left[\frac{\text{K}}{\text{m}^3} \right]$$

III.5.3 Exemple 3

Résoudre l'exemple 2 pour le cas où la face « Ouest » est maintenue à 100°C et la face « Est » est isolée.

Solution.

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} + q = 0 \\ T(0) = 100^\circ \text{C} \\ \text{à } x = L \text{ paroi isolée } Q_L = 0 \end{cases}$$

A la face Est, la paroi est isolée, on introduit la définition de la densité du flux par la loi de Fourier

$$Q_L = \frac{dT}{dx} = 0$$

On évalue le gradient $\frac{dT}{dx}$ par un développement en série de Taylor d'ordre 1 à gauche

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}$$

A $x = L$ c'est-à-dire au dernier nœud, dans notre cas $n = 5$

$$\begin{cases} \frac{T_5 - T_4}{\Delta x} \\ T_5 = T_4 \\ T_1 = 100 \\ T_1 - 2T_2 + T_3 = -\frac{q_2 \Delta x^2}{k} \\ T_2 - 2T_3 + T_4 = -\frac{q_2 \Delta x^2}{k} \\ T_3 - 2T_4 + T_5 = -\frac{q_2 \Delta x^2}{k} \\ T_5 = T_4 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on aura :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ \frac{q_2 \Delta x^2}{k} \end{bmatrix}$$

III.5.4 Exemple 4

Une plaque d'uranium est soumise à une isolation d'un côté et à une convection de l'autre côté. La formulation de différences finies de ce problème doit être obtenue, et les températures nodales dans des conditions stables doivent être déterminées.

Hypothèses

- 1- Le transfert de chaleur à travers le mur est régulier car il n'y a aucune indication de changement avec le temps.
- 2- Le transfert de chaleur est unidimensionnel car la plaque est grande par rapport à son épaisseur.
- 3- La conductivité thermique est constante.

4- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.

Propriétés La conductivité thermique est donnée comme étant $k = 28 \text{ W / m} \cdot ^\circ \text{C}$.

Le nombre de nœuds est spécifié pour être $M = 6$. Alors l'espacement nodal Δx devient

$$\Delta x = \frac{L}{M-1} = \frac{0.05 \text{ m}}{6-1} = 0.01 \text{ m}$$

Ce problème implique 6 températures nodales inconnues, et donc nous devons avoir 6 équations pour les déterminer de manière unique. Le nœud 0 est sur une frontière isolée, et nous pouvons donc le traiter comme une note intérieure en utilisant le concept d'image miroir. Les nœuds 1, 2, 3 et 4 sont des nœuds intérieurs, et donc pour eux, nous pouvons utiliser la relation de différence finie générale exprimée comme

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0, \text{ pour } m=0, 1, 2, 3, \text{ et } 4$$

Enfin, l'équation aux différences finies pour le nœud 5 sur la surface droite soumise à convection est obtenue en appliquant un bilan énergétique sur l'élément demi-volume autour du nœud 5 et en prenant la direction de tous les transferts de chaleur vers le nœud considéré:

nœud 0 (surface gauche - isolé) : $\frac{T_1 - 2T_0 + T_1}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$

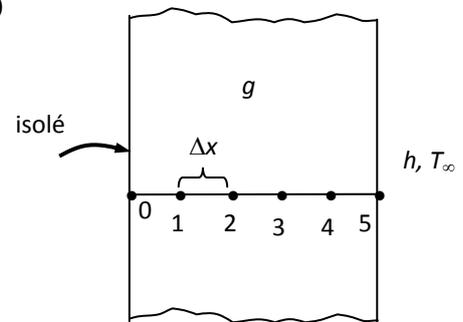
Nœud 1 (intérieur) : $\frac{T_0 - 2T_1 + T_2}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$

nœud 2 (intérieur) : $\frac{T_1 - 2T_2 + T_3}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$

nœud 3 (intérieur) : $\frac{T_2 - 2T_3 + T_4}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$

nœud 4 (intérieur) : $\frac{T_3 - 2T_4 + T_5}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$

nœud 5 (surface droit - convection) : $h(T_\infty - T_5) + k \frac{T_4 - T_5}{\Delta x} + \dot{g}(\Delta x / 2) = 0$



Où $\Delta x = 0.01 \text{ m}$, $\dot{g} = 6 \times 10^5 \text{ W/m}^3$, $k = 28 \text{ W/m} \cdot ^\circ \text{C}$, $h = 60 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ \text{C}$, and $T_\infty = 30^\circ \text{C}$.

Ce système de 6 équations avec six températures inconnues constitue la formulation de différence finie du problème.

(b) Les 6 températures nodales dans des conditions stables sont déterminées en résolvant les 6 équations ci-dessus simultanément avec un solveur d'équations à

$T_0 = 556.8^\circ \text{C}$, $T_1 = 555.7^\circ \text{C}$, $T_2 = 552.5^\circ \text{C}$, $T_3 = 547.1^\circ \text{C}$, $T_4 = 539.6^\circ \text{C}$, et $T_5 = 530.0^\circ \text{C}$.

CHAPITRE IV

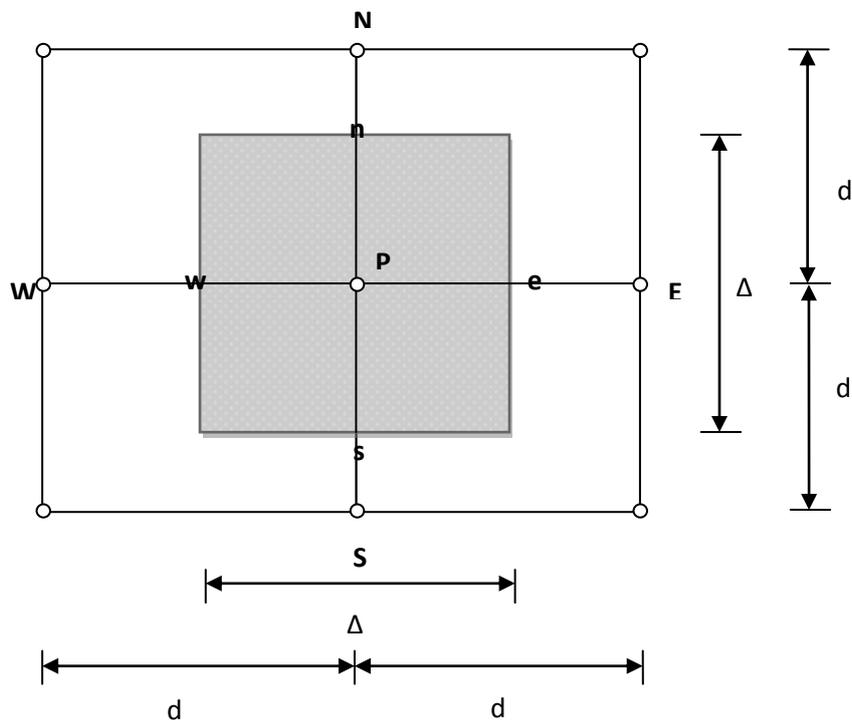
DISCRETISATION DE L'EQUATION DE LA CONDUCTION DE CHALEUR (2-D) EN REGIME PERMANENT PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

IV. Discrétisation de l'équation de la conduction de chaleur (2-D) en Régime permanent par la méthode des différences finies

Considère une région rectangulaire dans laquelle la conduction de chaleur est important dans la direction x,y

maintenant, divisons le plan $(x-y)$ de la région en maille rectangulaire ayant des nœuds espaces de Δx et Δy dans les directions x,y , et considérons $\Delta z=1$ dans la direction Z .

Notre objectif est de chaleur les temperature aux nœuds $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$ suivant x et $N=1, 2, 3, \dots, N-1$ suivant y les coordonnées du nœud (m, n) sont simplement $x = m.\Delta x$ et $y = n.\Delta y$



FigIV.1 : élément de volume d'un nœud général (m, n) pour la conduction (2-D) en coordonnées cartésiennes.

Maintenant considérons un élément de volume de dimensions $\Delta x.\Delta y.l$ centré ou tour du nœud (m, n) dans une région dont laquelle la chaleur est générée a un taux de e (m^3) et la conductivité thermique K est constante (voir FigIV.2)

L'équation d'énergie sur l'élément de volume de la fig IV.2 peut être exprimée comme, en régime permanent.

$$\left(\begin{array}{c} \text{toux de la conduction} \\ \text{de chaleur aux} \\ \text{surface} \\ \text{(left, right, bottom, top)} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{toux de generation} \\ \text{de chaleur a} \\ \text{l'interieur} \\ \text{de l'element} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{toux de} \\ \text{changement} \\ \text{de l'energie de} \\ \text{l'elment} \end{array} \right)$$

$$Q_{\text{cond, left}} + Q_{\text{cond, right}} + Q_{\text{cond, top}} + Q_{\text{cond, bottom}} + E_{\text{gen, elem}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t} \dots \dots (IV. 1)$$

Remarque: les températures entre les nœuds adjacents doivent variés linéairement, la surface d'échange dans la direction x, $A_x = \Delta y.l = \Delta y$

Et surface d'échange suivant y, $A_y = \Delta x.l = \Delta x$

$$k\Delta y \frac{(T_{m-1,n} - T_{m,n})}{\Delta x} + k\Delta y \frac{(T_{m+1,n} - T_{m,n})}{\Delta x} + k\Delta x \frac{(T_{m,n-1} - T_{m,n})}{\Delta y} + k\Delta x \frac{(T_{m,n+1} - T_{m,n})}{\Delta y} + e_{m,n}(\Delta x.\Delta y) = 0 \dots \dots \dots (IV. 2)$$

Divisant l'eq(4-2) par $\Delta x.\Delta y$, on obtient :

$$\frac{(T_{m-1,n} - 2T_{m,n} + T_{m+1,n})}{\Delta x^2} + \frac{(T_{m,n-1} - 2T_{m,n} + T_{m,n+1})}{\Delta y^2} + \frac{e_{m,n}}{k} = 0 \dots \dots \dots (IV. 3)$$

Pour $M=1,2,3,\dots, M-1$

$N=1, 2,3,\dots, M-1$

Dans le cas $\Delta x = \Delta y = L$, l'eq(4-3) devient :

$$T_{m-1,n} - 4T_{m,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} + T_{m,n+1} + \frac{e_{m,n}L^2}{k} = 0 \dots \dots \dots (IV. 4)$$

Elle peut être exprimée dans cette forme

$$T_{\text{left}} + T_{\text{right}} + T_{\text{bottom}} + T_{\text{top}} - 4T_{\text{noeud}} + \frac{e_{\text{noeud}}L^2}{k} = 0 \dots \dots \dots (IV. 6)$$

Exemple IV.1 (conduction de chaleur 2-D, régime permanent dans une barre en L)

Considère le transfert de chaleur en régime permanent dans un corps solide L dont la section et données dans la figure Exemple (IV.1) le transfert de chaleur dans la direction Z est négligeable et donc le transfert de chaleur est bidimensionnelle a

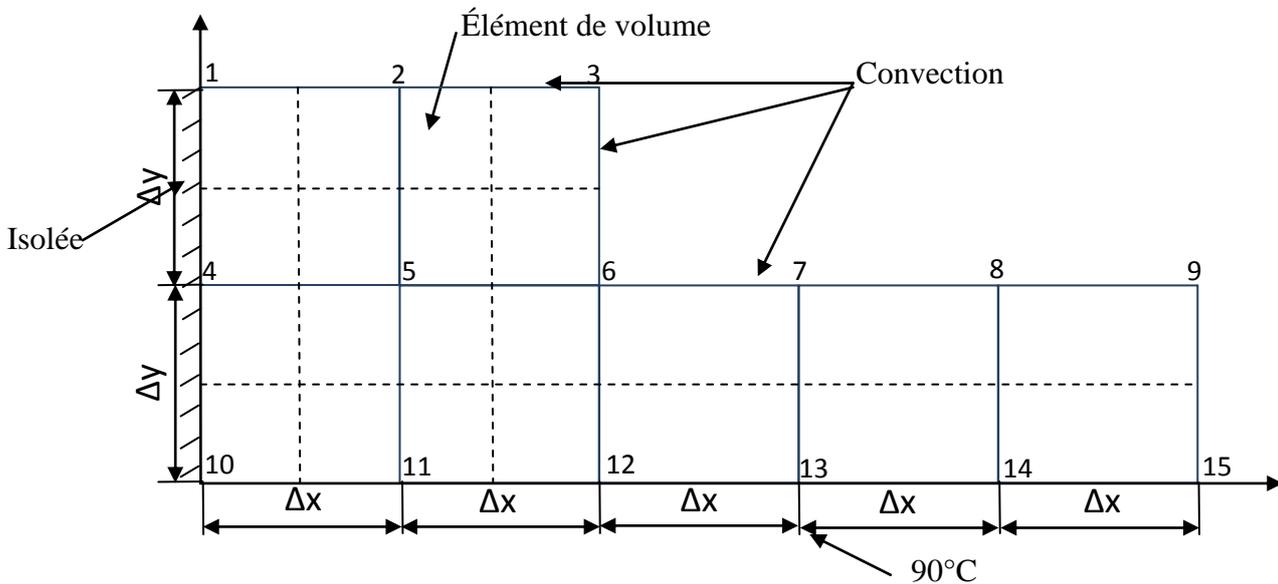
conductivité thermique du corps $15/\text{m}\cdot^\circ\text{C}$. Et la chaleur générée dans corps $e = 2 \times 10^6/\text{m}^3$

-la surface gauche du corps et isolé et la surface en bas est maintenue à une température uniforme de 90°C la totalité de la surface en haut est soumis à la température d'air $T_\infty = 215^\circ\text{C}$ avec un coefficient de transfert de chaleur convectif et la surface droite est soumise au flux de chaleur $q_R = 500/\text{m}^2$

Le nombre de nœuds total égale 15 avec $\Delta x = \Delta y = 1.2\text{cm}$

Six nœuds sont en bas de la surface et ainsi leur température est température connue

*obtenir les équations de la différence finis et calculer les températures nodales dans chaque nœud en sachant les équations obtenir.

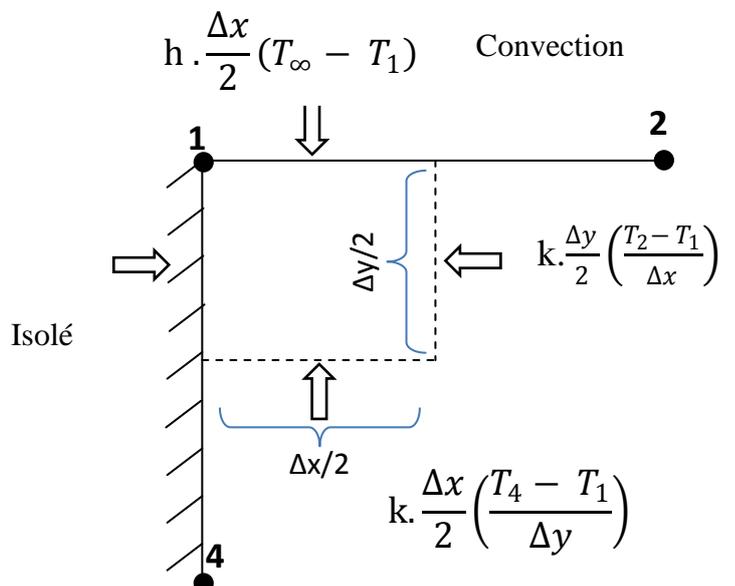


Solution exemple IV.1 :

Supposition

- 1- Régime permanent et 2-D
- 2- K-Cte
- 3- rayonnement est négligeable

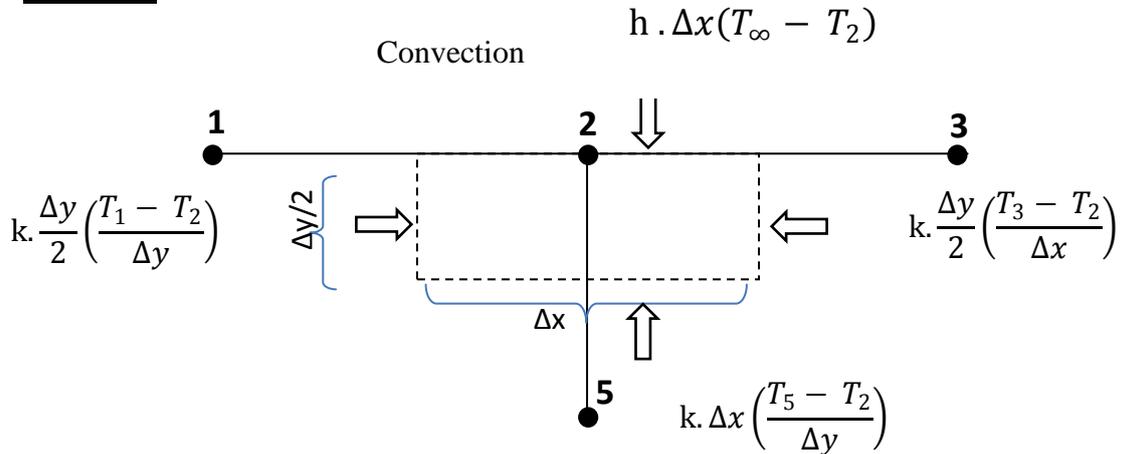
Nœud 1



$$k \cdot \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{T_2 - T_1}{\Delta x} \right) + 0 + k \cdot \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{T_4 - T_1}{\Delta y} \right) + h \cdot \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_1) + e_1 \left(\frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2} \right) = 0$$

$$-\left(2 + \frac{hl}{k}\right) T_1 + T_2 + T_4 = -\frac{hl}{k} T_\infty - \left(\frac{e_1 l^2}{2k}\right) = 0$$

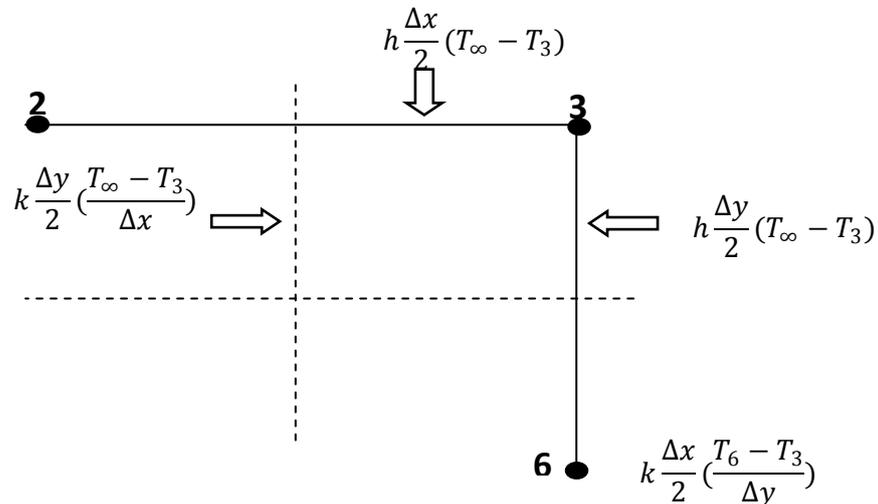
Nœud 2



$$k \cdot \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{T_1 - T_2}{\Delta x} \right) + k \cdot \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{T_3 - T_2}{\Delta x} \right) + k \cdot \Delta x \left(\frac{T_5 - T_2}{\Delta y} \right) + h \cdot \Delta x (T_\infty - T_2) + e_2 \left(\Delta x \cdot \frac{\Delta y}{2} \right) = 0$$

$$T_1 - \left(4 + \frac{2hl}{k}\right) T_2 + T_3 - 2T_5 = -\frac{2hl}{k} T_\infty - \left(\frac{e_2 l^2}{k}\right) = 0$$

Nœud 3

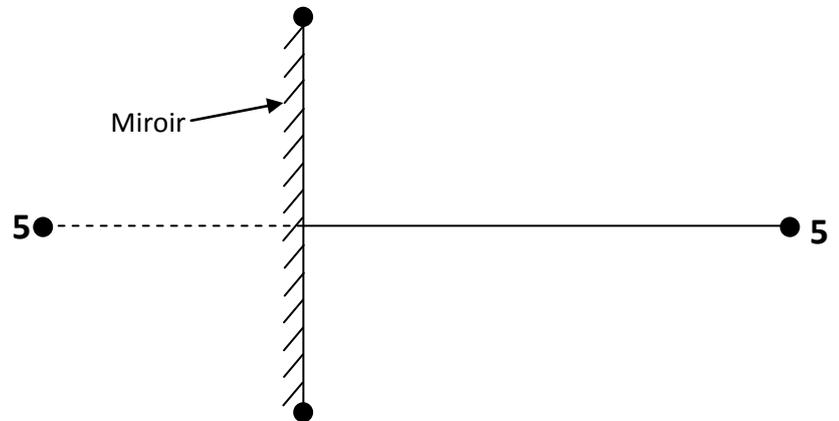


$$k \cdot \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{T_2 - T_3}{\Delta x} \right) + k \cdot \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{T_6 - T_3}{\Delta y} \right) + h \cdot (\Delta x + \Delta y) (T_\infty - T_3) + e_3 \left(\frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2} \right) = 0$$

$$T_1 - \left(2 + \frac{2hl}{k}\right) T_3 + T_6 + T_4 = -\frac{2hl}{k} T_\infty - \left(\frac{e_3 l^2}{2k}\right) = 0$$

Remarque : le point 4 se situe sur la limite isolée et peut être traité comme nœud interne, en remplaçant l'isolation par un miroir ceci met une image réfléchie au nœud 5 du côté gauche du nœud 4

Nœud 4 :

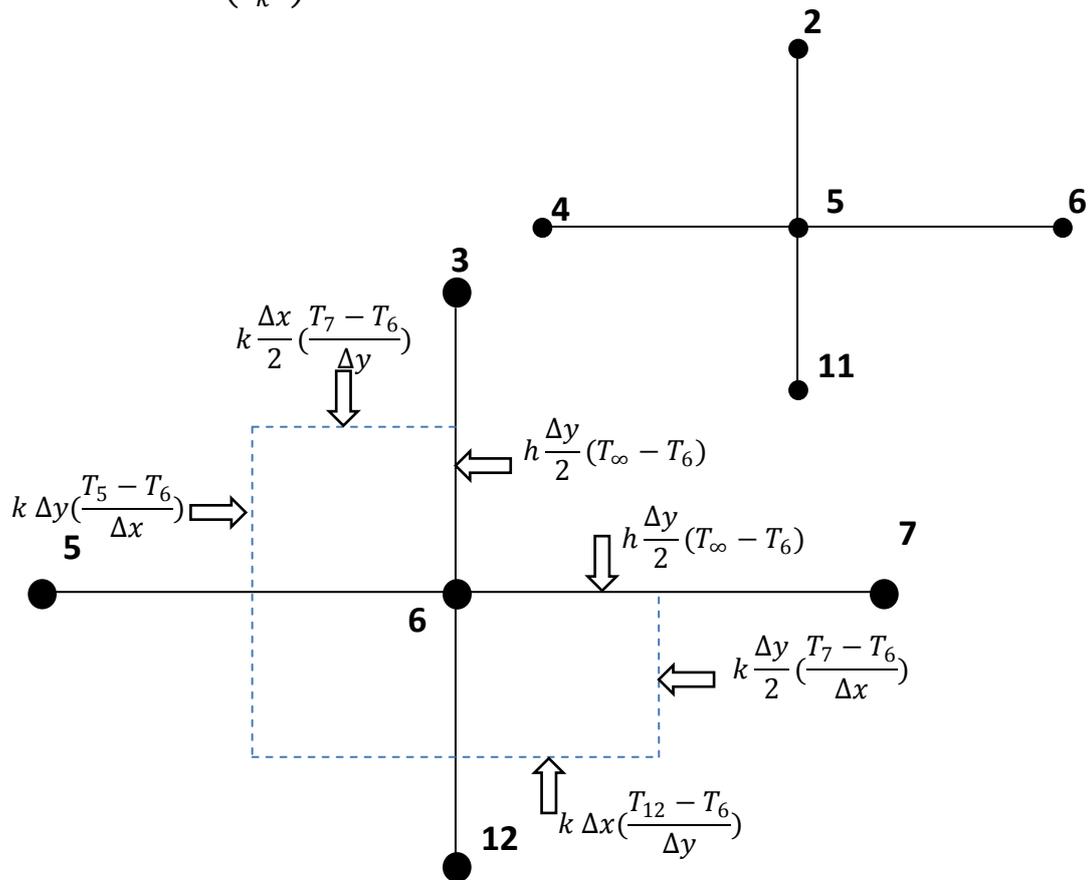


$$T_5 + T_5 + T_1 + T_{10} - 4 T_4 - \left(\frac{e_4 l^2}{k}\right) = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Nœud 5 :

$$T_4 + T_6 + T_{11} + T_2 - 4 T_5 - \left(\frac{e_5 l^2}{k}\right) = 0 \dots \dots \dots (5)$$

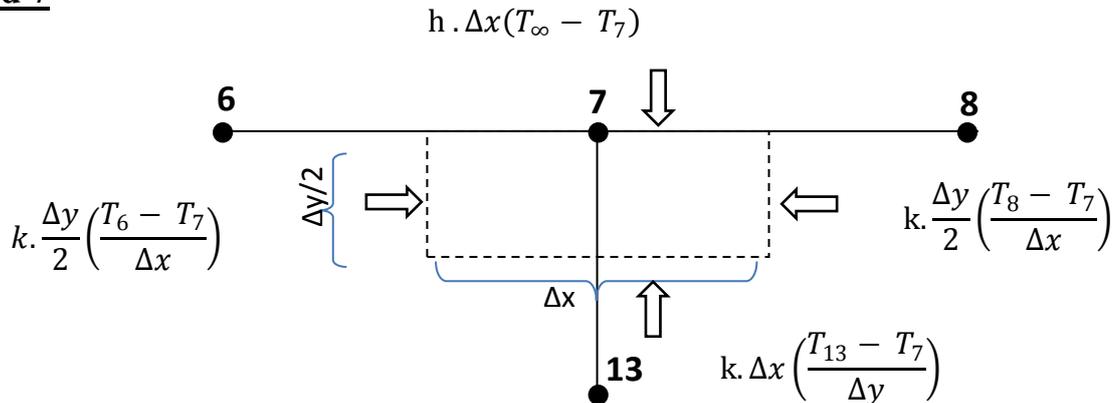
Nœud 6 :



$$k \cdot \Delta y \left(\frac{T_5 - T_6}{\Delta x} \right) + k \cdot \Delta x \left(\frac{T_{12} - T_6}{\Delta y} \right) + k \cdot \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{T_3 - T_6}{\Delta y} \right) + h \cdot \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_6) + h \cdot \frac{\Delta y}{2} (T_\infty - T_6) + k \cdot \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{T_7 - T_6}{\Delta x} \right) + e_6 \left(\frac{3}{4} \cdot \Delta y \Delta x \right) = 0$$

$$T_3 - 2T_5 - \left(6 + \frac{2hl}{k} \right) T_6 + T_4 = -180 - \frac{2hl}{k} T_\infty - \left(3 \frac{e_6 l^2}{2k} \right) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

Nœud 7



$$k \cdot \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{T_6 - T_7}{\Delta x} \right) + k \cdot \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{T_8 - T_7}{\Delta x} \right) + k \cdot \Delta x \left(\frac{T_{13} - T_7}{\Delta y} \right) + h \cdot \Delta x (T_\infty - T_7) + e_7 \left(\frac{\Delta y}{2} \Delta x \right) = 0$$

$$T_6 - \left(4 + \frac{2hl}{k} \right) T_7 + T_8 = -180 - \frac{2hl}{k} T_\infty - \left(\frac{e_7 l^2}{k} \right) = 0 \dots \dots \dots (7)$$

Le nœud 8 identique au nœud 7 la formulation de différence finie peut être obtenue à partir du nœud 7

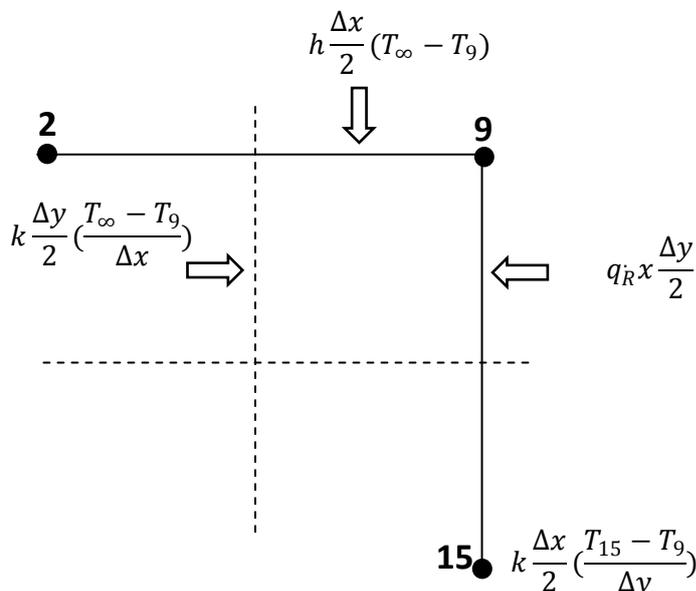
Nœud 8

$$T_7 - \left(4 + \frac{2hl}{k} \right) T_8 + T_9 = -180 - \frac{2hl}{k} T_\infty - \left(\frac{e_8 l^2}{k} \right) = 0$$

Nœud 9

$$\Delta x = \Delta y = 1$$

$$T_{15} = 90^\circ C$$



$$T_8 - \left(2 + \frac{2hl}{k}\right)T_9 = -90 - \frac{q_R l}{k} - \frac{2hl}{k}T_\infty - \left(\frac{e_9 l^2}{k}\right) = 0$$

Le système de 9 équations pour détermination les températures nodales inconnus

$$-2.064 T_1 + T_2 + T_4 = -11.2 \dots\dots\dots(1)$$

$$T_1 + 4.128 T_2 + T_3 + 2T_5 = -22.4 \dots\dots\dots(2)$$

$$T_2 - 2.128 T_3 + T_6 = -12.8 \dots\dots\dots(3)$$

$$T_1 - 4T_4 + 2T_5 = -109.2 \dots\dots\dots(4)$$

$$T_2 + T_4 - 4T_5 + T_6 = -109.2 \dots\dots\dots(5)$$

$$T_3 + 2T_5 - 6.128T_6 + T_7 = -212.0 \dots\dots\dots(6)$$

$$T_6 - 4.128T_7 + T_8 = -202.4 \dots\dots\dots(9)$$

$$T_7 - 4.128T_8 + T_9 = -202.4 \dots\dots\dots(10)$$

$$T_8 - 2.064T_9 = -105.2 \dots\dots\dots(11)$$

En utilisant la méthode de Gauss-Seidel au thomas, la solution de système donne

$$T_1 = 112.1^\circ\text{C} \quad T_2 = 110.8^\circ\text{C} \quad T_3 = 106.6^\circ\text{C} \quad T_4 = 109.4^\circ\text{C}$$

$$T_5 = 108.1^\circ\text{C} \quad T_6 = 103.2^\circ\text{C} \quad T_7 = 97.3^\circ\text{C} \quad T_8 = 96.3^\circ\text{C}$$

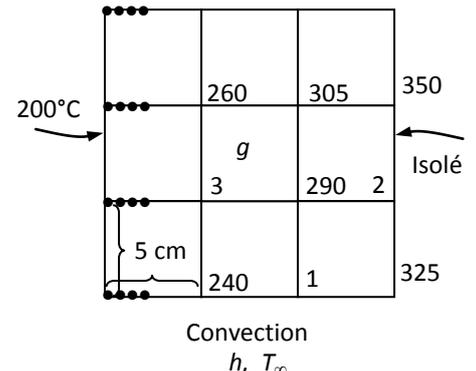
$$T_9 = 97.6^\circ\text{C} .$$

Exemple IV.2

Un corps long et solide est soumis à un transfert thermique bidimensionnel régulier. Les températures nodales inconnues et le taux de perte de chaleur de la surface inférieure à travers une section de 1 m de long doivent être déterminés.

Hypothèses

1. Le transfert de chaleur à travers le corps doit être régulier et bidimensionnel.
2. La chaleur est générée uniformément dans le corps.
3. Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable



Propriétés : La conductivité thermique est donnée comme étant $k = 45 \text{ W / m} \cdot ^\circ \text{C}$.

Analyse L'espacement nodal est donné $\Delta X = \Delta Y = L = 0,05 \text{ m}$, et la forme générale de différence finie d'un nœud intérieur pour une conduction thermique bidimensionnelle stable est exprimée comme

$$T_{\text{left}} + T_{\text{top}} + T_{\text{right}} + T_{\text{bottom}} - 4T_{\text{node}} + \frac{\dot{g}_{\text{node}} l^2}{k} = 0$$

Ou

$$\frac{\dot{g}_{\text{node}} l^2}{k} = \frac{\dot{g}_0 l^2}{k} = \frac{(8 \times 10^6 \text{ W/m}^3)(0.05 \text{ m})^2}{214 \text{ W/m} \cdot ^\circ \text{C}} = 93.5^\circ \text{C}$$

Les équations aux différences finies pour les nœuds limites sont obtenues en appliquant un bilan énergétique sur les éléments volumiques et en prenant la direction de tous les transferts de chaleur vers le nœud considéré:

$$\text{Nœud 1 (convection): } k \frac{l}{2} \frac{240 - T_1}{l} + kl \frac{290 - T_1}{l} + k \frac{l}{2} \frac{325 - T_1}{l} + hl(T_\infty - T_1) + \frac{e_0 l^2}{2k} = 0$$

$$\text{Nœud 2 (interieur): } 350 + 290 + 325 + 290 - 4T_2 + \frac{e_0 l^2}{k} = 0$$

$$\text{Nœud 3 (interieur): } 260 + 290 + 240 + 200 - 4T_3 + \frac{e_0 l^2}{k} = 0$$

$$\text{Ou } k = 45 \text{ W/m} \cdot ^\circ \text{C}, h = 50 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ \text{C}, e = 8 \times 10^6 \text{ W/m}^3, T_\infty = 20^\circ \text{C}$$

$$\text{Substitution } T_1 = \mathbf{280.9^\circ \text{C}}, T_2 = \mathbf{397.1^\circ \text{C}}, T_3 = \mathbf{330.8^\circ \text{C}},$$

(b) Le taux de perte de chaleur de la surface inférieure à travers une section de 1 m de longueur est :

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \sum_m \dot{Q}_{\text{element}, m} = \sum_m hA_{\text{surface}, m} (T_m - T_\infty) \\ &= h(l/2)(200 - T_\infty) + hl(240 - T_\infty) + hl(T_1 - T_\infty) + h(l/2)(325 - T_\infty) \\ &= (50 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ \text{C})(0.05 \text{ m} \times 1 \text{ m})[(200 - 20)/2 + (240 - 20) + (280.9 - 20) + (325 - 20)/2]^\circ \text{C} = \mathbf{1808 \text{ W}} \end{aligned}$$

Chapitre V

DISCRETISATION DE L'EQUATION DE LA CONDUCTION DE CHALEUR EN REGIME TRANSITOIRE PAR LA METHODE DE LA DIFFERENCE FINIE

V.1 Discrétisation de l'équation de la conduction de chaleur en régime transitoire par la méthode de la différence finie

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la méthode de la différence finie pour résoudre le problème transitoire, dans ce problème les températures changent avec le temps aussi bien que la position, et donc la solution des différences finies du problème transitoire exige une discrétisation en temps et en espace (Fig V.1)

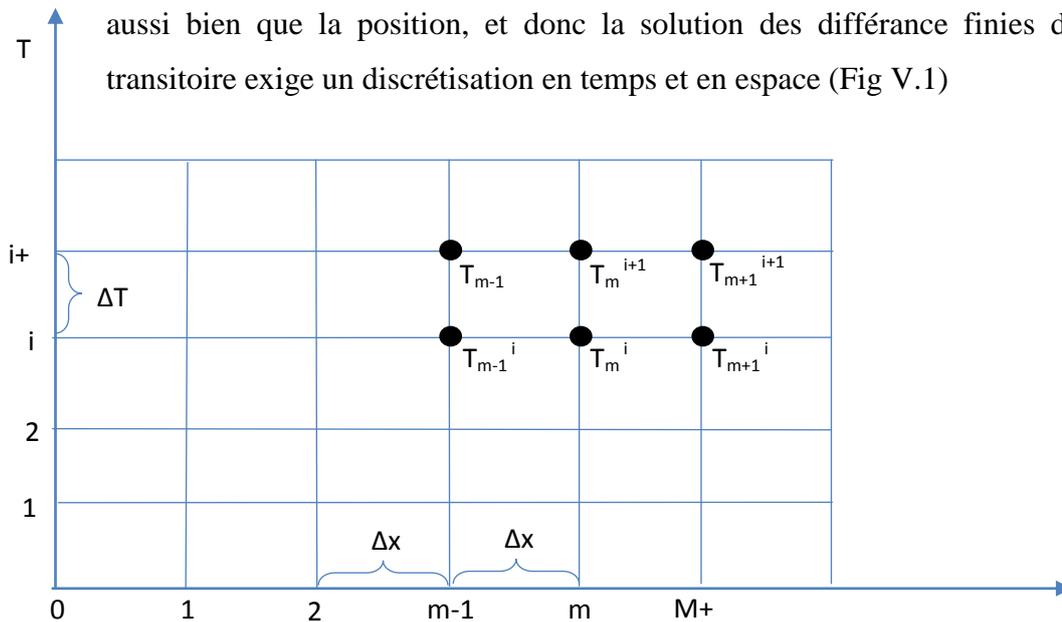


Fig V.1 formulation de la différence du problème transitoire en temps et en espace

Dans les problèmes transitoires l'exposant (i) est utilisé comme compteur d'incrément de temps correspond à la condition initiale spécifique en général 'i' à $t_i = i$

Δt

(Δt incrément du temps, le pas de temps)

T_m^i : Représente la température aux nœuds m à l'incrément de temps

$$\left(\begin{array}{c} \text{la chaleur transférée} \\ \text{dans l'élément de volume} \\ \text{à} \\ \text{partir des toutes ses} \\ \text{surface} \\ \text{durant} \\ \Delta t \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{la chaleur générée} \\ \text{dans l'élément de} \\ \text{volume} \\ \text{à durant} \\ \Delta t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{de changement} \\ \text{de} \\ \text{l'énergie l'élément} \\ \text{de} \\ \text{volume} \\ \text{durant} \\ \Delta t \end{array} \right)$$

$$\text{On } \sum_{\text{toutes les surfaces}} Q + \Delta t \cdot E_{\text{gen}} \cdot \text{élément} = \Delta E_{\text{élément}} \dots \dots \dots (V. 1)$$

Avec

$$\Delta E_{\text{élément}} = E_{t+\Delta t} - E_t = m c_p (T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho \cdot dx \cdot A \cdot C \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t). (V. 2)$$

ρ est la masse volumique, C_p est la chaleur spécifique de l'élément en divisant l'équation V. 1 par Δt

$$\sum_{\text{toutes les surfaces}} Q + \Delta t \cdot E_{\text{gen}} \cdot \text{élément} = \frac{\Delta E_{\text{élément}}}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot V_{\text{élément}} \cdot C_p \Delta t}{\Delta t} \dots (V. 3)$$

Pour n'importe quels nœuds dans l'élément de volume l'équation est :

$$\sum_{\text{toutes les surfaces}} Q + \Delta t \cdot E_{\text{gen}} \cdot \text{élément} = \rho \cdot V_{\text{élément}} \cdot C_p \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \dots \dots (V. 4)$$

Où T_m^{i+1} et T_m^i représentent la température du nœud m aux temps $t_i = i \Delta t$ et $t_{i+1} = (i+1) \Delta t$ et $T_m^{i+1} - T_m^i$ représente le changement de température du nœud m durant l'intervalle de temps Δt entre les incréments i et $i+1$ (Fig V.2)

$$\Delta E = \rho \cdot v \cdot C_p \cdot \Delta t = \rho \cdot v \cdot C_p \cdot (T_m^{i+1} - T_m^i) \dots \dots \dots (V. 5)$$

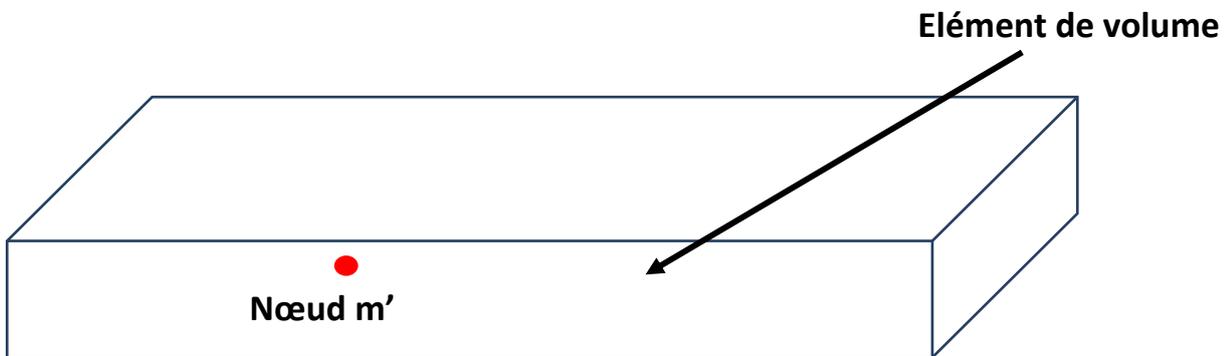


Fig. V.2 de changement en régime dans l'élément de volume durant un intervalle de temps Δt

$T_m^{i+1} = T_m^i$ Pas de changement de température en fonction de temps

- Méthode explicite :

$$\sum_{\text{toutes les surfaces}} Q + E_{\text{gen}} \cdot \text{élément} = \rho \cdot V_{\text{élément}} \cdot C_p \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \dots \dots \dots (V. 6)$$

- Méthode implicite :

$$\sum_{\text{toutes les surfaces}} Q^{i+1} + E_{\text{gen}}^{i+1} \cdot \text{element} = \rho \cdot V_{\text{élément}} \cdot C_p \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \dots \dots \dots (V. 7)$$

V.2. Conduction de chaleur transitoire dans une paroi plane

Considère la conduction de chaleur transitoire dans une paroi plane en régime transitoire d'une paroi plane d'épaisseur L avec génération de chaleur $e'(x, t)$, qui doit varier avec le temps et la position, et la conductivité thermique k est constante et un maillage de deux dimensions $\Delta x = \frac{L}{M}$ et des nœuds à $1, 2, \dots, M$ dans la direction x voir figure (Fig V.3)

Noter que $V_{\text{élément}} = A \cdot \Delta x$, pour un nœud interne la formulation des différences finies en régime transitoire peut être exprimée en utilisant l'équation (V.3) comme.

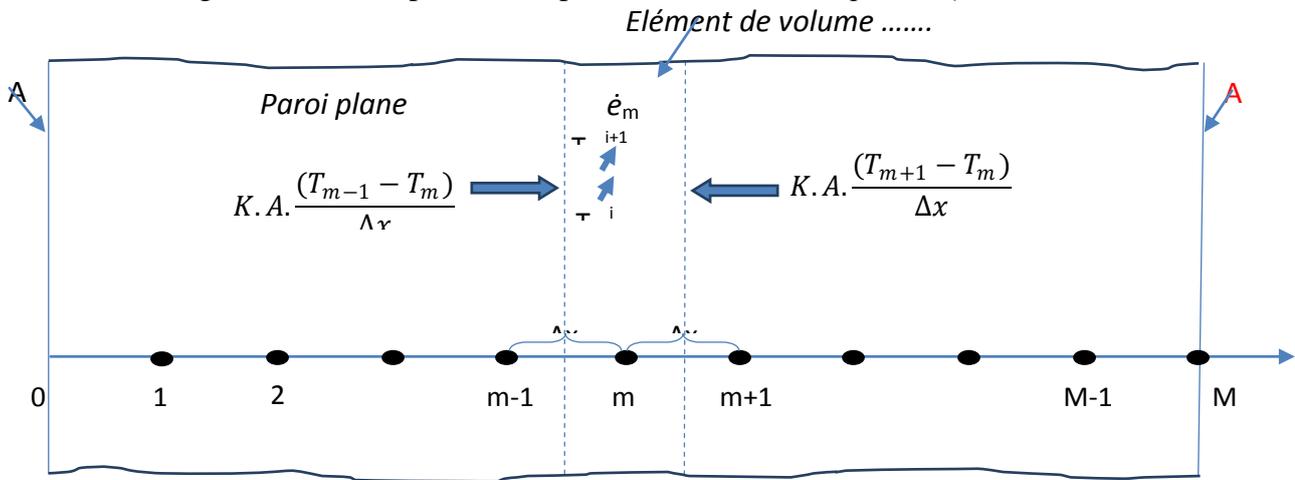


Fig V.3 les nœuds et l'élément de volume pour la formulation de la différence finie transitoire de la conduction 1-D dans une paroi plane.

$$K \cdot A \cdot \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} + K \cdot A \cdot \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} + e_{\text{gen élément}} \cdot A \cdot \Delta x = \rho \cdot C_p A \cdot \Delta x \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \dots \text{(V. 8)}$$

L'Eq 5.6 par $\left(\frac{\Delta x}{k \cdot A}\right)$ l'équation V.5 devient

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} + \frac{e'_m \cdot \Delta x^2}{k} = \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} (T_m^{i+1} - T_m^i) \dots \text{(V. 9)}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot C_p} \text{ Diffusivité thermique de la paroi } [m^2/s]$$

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \dots \text{(V. 10)}$$

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} + \frac{e'_m \cdot \Delta x^2}{k} = \frac{(T_m^{i+1} - T_m^i)}{\tau} \dots \text{(V. 11)}$$

V.3.1. Formulation explicite des différences finies :

$$T_{m-1}^i - 2T_m^i + T_{m+1}^i + \frac{e_m^i \cdot \Delta x^2}{k} = \frac{(T_m^{i+1} - T_m^i)}{2} \dots \dots \dots (V.12)$$

$$T_m^{i+1} = \tau(T_{m-1}^i + T_{m+1}^i) + (1 - 2\tau)T_m^i + \tau \frac{e_m^i \cdot \Delta x^2}{k} \dots \dots \dots (V.13)$$

m = 1, 2, 3, ..., M-1

V.3.2 Formulation Implicite des différences finies :

$$T_{m-1}^{i+1} - T_m^{i+1} + T_{m+1}^{i+1} + e_m^{i+1} \cdot \frac{\Delta x^2}{k} = \frac{(T_m^{i+1} - T_m^i)}{\tau} \dots \dots \dots (V.14)$$

$$\tau T_{m-1}^{i+1} - (1 - 2\tau)T_m^{i+1} + \tau T_{m+1}^{i+1} + \tau e_m^{i+1} \cdot \frac{\Delta x^2}{k} + T_m^i = 0 \dots \dots (V.15)$$

Par exemple, la formulation de la conduction aux limites (cas de la convection) au nœud 0 (voir Fig.V.4)

Pour le cas de méthode explicite peut être exprimé comme

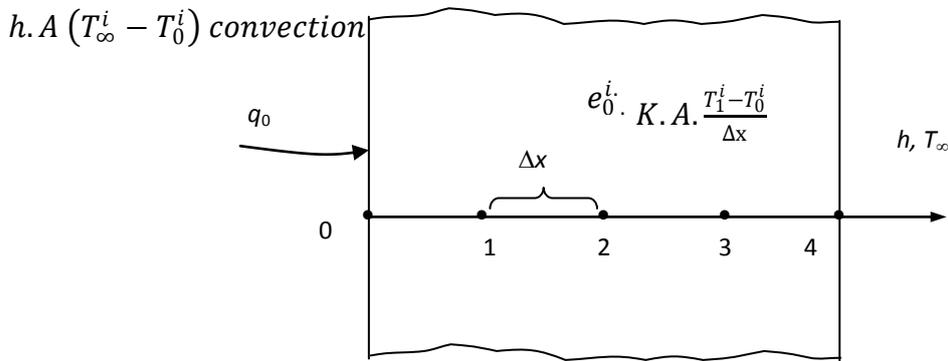


Fig V.4 schéma explicite par la conduction aux limites (cas de la convection) côte gauche d'une paroi plane

$$K \cdot A \cdot \frac{T_1^i - T_0^i}{\Delta x} + h \cdot A (T_\infty^i - T_0^i) + e_m^i \cdot \left(A \cdot \frac{\Delta x}{2} \right) = \rho \cdot C_p \left(A \cdot \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{T_0^{i+1} - T_0^i}{\Delta t} \dots \dots \dots (V.16)$$

$$T_0^{i+1} = \left(1 + 2 \cdot \tau - 2 \cdot \tau \frac{h \Delta x}{k} \right) T_0^i + 2 \cdot \tau \cdot T_1^i + 2 \cdot \tau \frac{h \Delta x}{k} \cdot T_\infty + \frac{\tau \cdot e_0^i \Delta x^2}{k} \dots \dots \dots (V.17)$$

V.3. 1 Critères de la stabilité pour la méthode explicite

La méthode explicite est facile à utiliser mais elle souffre d'un défaut indésirable qui sévèrement son utilisation, la méthode explicite n'est pas conditionnellement stable.

*Si Δt n'est pas assez petit, la solution obtenues par la méthode explicite peuvent osciller et divergent de la solution réelle.

-pour éviter tels divergence, la valeur de Δt doit être inférieure à une certaine limite établie par le critère de stabilité

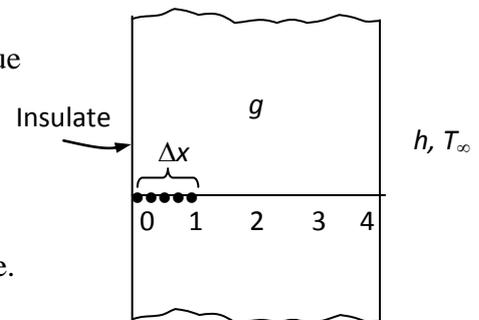
$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Exemple V.1 :

Considérer une plaque large d'uranium initialement à température uniforme est soumise à une isolation d'un côté et à une convection de l'autre côté. La formulation des différences finies transitoires de ce problème doit être obtenue, et les températures nodales après 5 min et dans des conditions stables doivent être déterminées

Hypothèses

- 1- Le transfert de chaleur est unidimensionnel car la plaque est grande par rapport à son épaisseur.
- 2- La conductivité thermique est constante.
- 3- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.



Propriétés La conductivité et la diffusivité sont données pour être $k = 28 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$ et $\alpha = 12.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$.

L'espacement nodal est donné $\Delta x = 0,02 \text{ m}$. Ensuite, le nombre de nœuds devient $M = L / \Delta x + 1 = 0,08 / 0,02 + 1 = 5$. Ce problème implique 5 températures nodales inconnues, et donc nous devons avoir 5 équations. Le nœud 0 est sur une frontière isolée, et nous pouvons donc le traiter comme une note intérieure en utilisant le concept d'image miroir. Les nœuds 1, 2 et 3 sont des nœuds intérieurs, et donc pour eux, nous pouvons utiliser la relation de différence finie explicite générale exprimée comme.

a) la Méthode explicite

$$T_{m-1}^i - 2T_m^i + T_{m+1}^i + \frac{e_m^i \Delta x^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau}$$

$$\text{EqV. 13 : } T_m^{i+1} = \tau(T_{m-1}^i + T_{m+1}^i) + (1 - 2\tau)T_m^i + \tau \frac{e_m^i \cdot \Delta x^2}{k} \dots \dots \text{ (V. 13)}$$

L'équation aux différences finies pour le nœud 4 sur la surface droite soumise à convection est obtenue en appliquant un bilan énergétique sur l'élément demi-volume autour du nœud 4 et en prenant la direction de tous les transferts de chaleur vers le nœud considéré:

$$\text{Noeud 0 (isolé): } T_0^{i+1} = \tau(T_1^i + T_1^i) + (1 - 2\tau)T_0^i + \tau \frac{e \cdot \Delta x^2}{k}$$

$$\text{Noeud 1 (intérieur): } T_1^{i+1} = \tau(T_0^i + T_2^i) + (1 - 2\tau)T_1^i + \tau \frac{e \cdot \Delta x^2}{k}$$

$$\text{Noeud 2 (intérieur): } T_2^{i+1} = \tau(T_1^i + T_3^i) + (1 - 2\tau)T_2^i + \tau \frac{e \cdot \Delta x^2}{k}$$

$$\text{Noeud 3 (intérieur): } T_3^{i+1} = \tau(T_2^i + T_4^i) + (1 - 2\tau)T_3^i + \tau \frac{e \cdot \Delta x^2}{k}$$

$$\text{Noeud 4 (intérieur): } h(T_\infty - T_4^i) + k \frac{T_3^i - T_4^i}{\Delta x} + e \cdot \frac{\Delta x}{2} = \rho \frac{\Delta x}{2} C \frac{T_4^{i+1} - T_4^i}{\Delta t}$$

$$K \cdot A \cdot \frac{T_4^i - T_3^i}{\Delta t} + h \cdot A (T_\infty - T_4^i) + e_4 \cdot \left(A \cdot \frac{\Delta x}{2} \right) = \rho \cdot C_p \left(A \cdot \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{T_4^{i+1} - T_4^i}{\Delta t}$$

En divisant cette équation par $k \cdot A / \Delta x \cdot 2$

$$2h \cdot \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_4^i) + 2(T_3^i - T_4^i) + e_4 \cdot \left(\frac{\Delta x}{k} \right) = \frac{T_4^{i+1} - T_4^i}{\tau}$$

Ou $\Delta x = 0.02 \text{ m}$, $\dot{g}_0 = 10^6 \text{ W/m}^3$, $k = 28 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$, $h = 35 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, et $\alpha = 12.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

La limite supérieure du pas de temps Δt est déterminée à partir des critères de stabilité qui nécessitent que tous les coefficients primaires soient supérieurs ou égaux à zéro. Le coefficient le plus petit dans ce cas, et donc les critères de stabilité pour ce problème peuvent être exprimés comme.

Le critère de stabilité

$$1 + 2 \cdot \tau - 2 \cdot \tau \frac{h \Delta x}{k} \geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{h \Delta x}{k} \right)} \rightarrow \tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\Delta t \leq \frac{(0.02 \text{ m})^2}{2(12.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})[1 + (35 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.02 \text{ m})/(28 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C})]} = 15.6 \text{ s}$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha\left(1+\frac{h\Delta x}{k}\right)} \leq 15.55$$

Par conséquent, tout pas de temps inférieur à 15,5 s peut être utilisé pour résoudre ce problème. Pour plus de commodité, choisissons le pas de temps $\Delta t = 15$ s. Ensuite, le nombre de Fourier maillé devient

$$\text{En prenant } \Delta t = 15\text{s} \Rightarrow \tau = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} = 0.45875$$

Remarque : n'importe quel $\Delta t \leq 15.5\text{s}$ peut être choisi pour résoudre ces problèmes

En substituant cette valeur et d'autres quantités données, les températures nodales après $5 \times 60 / 15 = 20$ pas de temps (5 min) sont déterminées comme étant

Après 5 min: $T_0 = 228.9^\circ\text{C}$, $T_1 = 228.4^\circ\text{C}$, $T_2 = 226.8^\circ\text{C}$, $T_3 = 224.0^\circ\text{C}$, et $T_4 = 219.9^\circ\text{C}$

(b) Le temps nécessaire pour un fonctionnement transitoire à établir est déterminé en augmentant le nombre de pas de temps jusqu'à ce que les températures nodales ne changent plus. Dans ce cas, un fonctionnement stable est établi en ---- min, et les températures nodales dans des conditions stables sont déterminées comme étant

$T_0 = 2420^\circ\text{C}$, $T_1 = 2413^\circ\text{C}$, $T_2 = 2391^\circ\text{C}$, $T_3 = 2356^\circ\text{C}$, et $T_4 = 2306^\circ\text{C}$

Discussion

La solution stable peut être vérifiée indépendamment en obtenant la formulation de différence finie stable et en résolvant les équations résultantes simultanément.

Time [s]	T ₁ [C]	T ₂ [C]	T ₃ [C]	T ₄ [C]	T ₅ [C]	Rangée
0	100	100	100	100	100	1
15	106.7	106.7	106.7	106.7	104.8	2
30	113.4	113.4	113.4	112.5	111.3	3
45	120.1	120.1	119.7	119	117	4
60	126.8	126.6	126.3	125.1	123.3	5
75	133.3	133.2	132.6	131.5	129.2	6
90	139.9	139.6	139.1	137.6	135.5	7
105	146.4	146.2	145.4	144	141.5	8
120	152.9	152.6	151.8	150.2	147.7	9
135	159.3	159.1	158.1	156.5	153.7	10
...
...
3465	1217	1213	1203	1185	1160	232
3480	1220	1216	1206	1188	1163	233
3495	1223	1220	1209	1192	1167	234
3510	1227	1223	1213	1195	1170	235

3525	1230	1227	1216	1198	1173	236
3540	1234	1230	1219	1201	1176	237
3555	1237	1233	1223	1205	1179	238
3570	1240	1237	1226	1208	1183	239
3585	1244	1240	1229	1211	1186	240
3600	1247	1243	1233	1214	1189	241

Tableau V.1

Variation de $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ et T_8 avec le temps obtenues par la méthode explicite

V.4. Conduction thermique transitoire 2-D

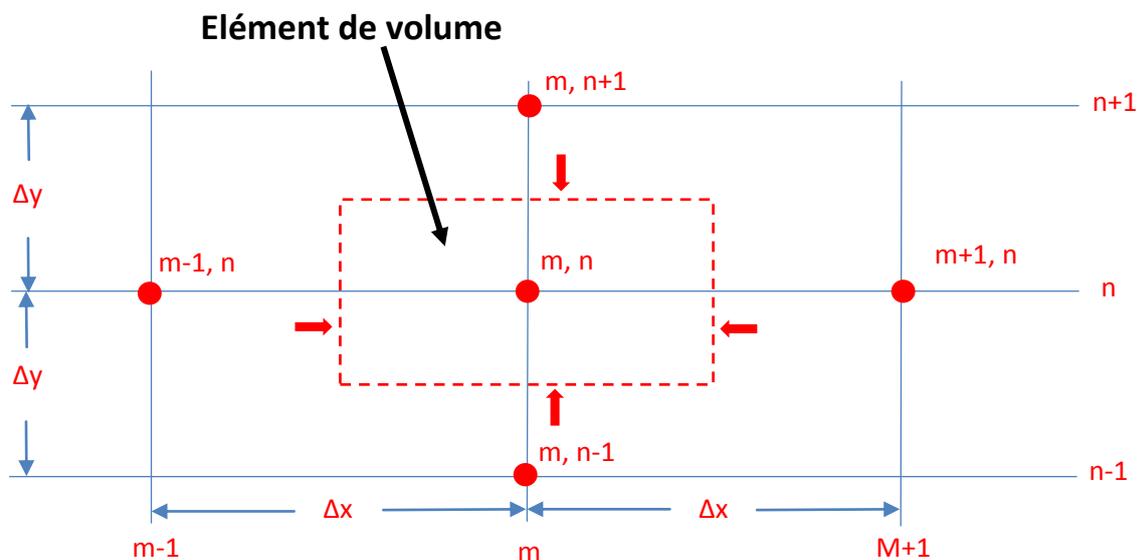


Fig V.5. L'élément de volume d'un nœud interne (m, n) pour la conduction thermique transitoire en coordonnées cartésiennes.

Considérer une région rectangulaire dans laquelle la conduction thermique est importante dans $\Delta Z=1$ dans la direction Z.

La chaleur peut être générée dans le milieu à un taux de $e(x, y, t)$ la quelle peut varier avec le temps et la position avec la conductivité thermique k du milieu supposer constant.

diviser le plan x, y de la région en maille rectangulaire de nœuds (espace) ayant des nœuds uniforme Δx et Δy , et considérer un nœud intérieur général (m, n) dont ses coordonnées sont $x = m \cdot \Delta x$ et $y = n \cdot \Delta y$ (voir fig V.5).

Noter que l'élément de volume centré au tour de l'intérieur général

$$V_{\text{élément}} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot 1 = \Delta x \cdot \Delta y$$

La formulation des différences finies en régime transitoire pour les nœuds intérieurs général sur la base de l'équation

$$\sum_{\text{toutes les surfaces}} Q + E_{\text{gen}} \cdot \text{élément} = \rho \cdot V_{\text{élément}} \cdot C_P \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t}$$

$$K \cdot \Delta y \cdot \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta t} + K \cdot \Delta y \cdot \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta t} + K \cdot \Delta x \cdot \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta t} + K \cdot \Delta x \cdot \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t} + e_{\text{gen}} \cdot \text{élément} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \rho \cdot C_P \cdot A \cdot \Delta x \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t}$$

Si $\Delta x \cdot \Delta y = L$.

$$T_{m-1,n} - 4T_{m,n} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + \frac{e_{m,n} L^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau}$$

Avec:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{k}{\rho \cdot C_P} & (\text{Diffusivité thermique}) \\ \tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} & (\text{nombre de Fourier}) \end{cases}$$

• **Méthode explicite :**

$$T_{\text{left}}^i + T_{\text{right}}^i + T_{\text{bottom}}^i + T_{\text{top}}^i - 4T_{\text{noeude}}^i + \frac{e_{\text{noeud}}^i \cdot L^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{2}$$

$$T_{\text{noeude}}^{i+1} = \tau \cdot (T_{\text{left}}^i + T_{\text{right}}^i + T_{\text{bottom}}^i + T_{\text{top}}^i) + (1 - 4\tau) T_{\text{noeude}}^i + \frac{\tau e_{\text{noeud}}^i \cdot L^2}{k}$$

$m=1, 2, 3, \dots, M-1$ valable pour les nœuds internes.

$n=1, 2, 3, \dots, N-1$.

Critère de stabilité :

$$1 - 4\tau \geq 0$$

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4}$$

Remarque : la méthode implicite est inconditionnellement stable, n'importe quelle valeur de Δt peut être utilisée à la méthode implicite.

Méthode implicite :

En exprimant l'Eq 5.19 à l'incrément de temps $i+1$ le côté gauche au bien i , on obtient la formulation implicite

$$T_{left}^{i+1} + T_{right}^{i+1} + T_{bottom}^{i+1} + T_{top}^{i+1} - 4T_{noeud}^{i+1} + \frac{e_{noeud}^{i+1} \cdot L^2}{k} = \frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i}{\tau}$$

Exemple V.2 :

La conduction de chaleur à travers une barre longue est solide en forme de L avec des conditions aux limites spécifiées est considérée. La température au coin supérieur (noeud # 3) du corps après 2, 5 et 30 min doit être déterminée avec la méthode des différences finies explicites transitoires.

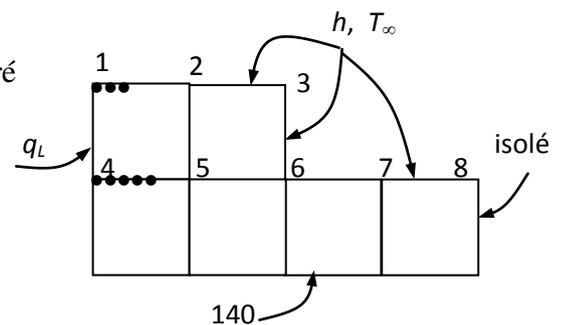
Hypothèses

1- Le transfert de chaleur à travers le corps est considéré

Comme transitoire et bidimensionnel.

2- La conductivité thermique est constante.

3- La génération de chaleur est uniforme.



Propriétés : La conductivité et la diffusivité sont données pour être $k = 15 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$ et $\alpha = 3.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$.

Une analyse

L'espace nodal est donné $\Delta x = \Delta y = l = 0,015 \text{ m}$. Les équations aux différences finies explicites sont déterminées sur la base du bilan énergétique pour le cas transitoire exprimé en

$$\sum_{\text{All sides}} \dot{Q}^i + \dot{G}_{\text{element}}^i = \rho V_{\text{element}} C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t}$$

Les quantités h , T_{∞} et e ne changent pas avec le temps, et donc nous n'avons pas besoin d'utiliser l'exposant i pour elles. De plus, les expressions du bilan énergétique peuvent être simplifiées en utilisant les définitions de la diffusivité thermique et le nombre de Fourier maillé sans dimension $\tau = \alpha \Delta t / l^2$ où $\Delta x = \Delta y = l$. On note que tous les nœuds sont des nœuds limites sauf le nœud 5 qui est un nœud intérieur. Par conséquent, nous devons nous fier aux bilans énergétiques pour obtenir les équations aux différences finies. En utilisant les bilans énergétiques, les équations aux différences finies pour chacun des 8 nœuds sont obtenues comme suit:

$$\text{Noeud1: } \dot{q}_L \frac{l}{2} + h \frac{l}{2} (T_\infty - T_1^i) + k \frac{l}{2} \frac{T_2^i - T_1^i}{l} + k \frac{l}{2} \frac{T_4^i - T_1^i}{l} + e \cdot \frac{l^2}{4} = \rho \frac{l^2}{4} C \frac{T_1^{i+1} - T_1^i}{\Delta t}$$

$$\text{Noeud2: } hl(T_\infty - T_2^i) + k \frac{l}{2} \frac{T_1^i - T_2^i}{l} + k \frac{l}{2} \frac{T_3^i - T_2^i}{l} + kl \frac{T_5^i - T_2^i}{l} + e \cdot \frac{l^2}{2} = \rho \frac{l^2}{2} C \frac{T_2^{i+1} - T_2^i}{\Delta t}$$

$$\text{Noeud3: } hl(T_\infty - T_3^i) + k \frac{l}{2} \frac{T_2^i - T_3^i}{l} + k \frac{l}{2} \frac{T_6^i - T_3^i}{l} + e \cdot \frac{l^2}{4} = \rho \frac{l^2}{4} C \frac{T_3^{i+1} - T_3^i}{\Delta t}$$

$$\text{(Il peut être réorganisé comme } T_3^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 4\tau \frac{hl}{k}\right) T_3^i + 2\tau \left(T_4^i + T_6^i + 2 \frac{hl}{k} T_\infty + \frac{e \cdot 3l^2}{2k}\right))$$

$$\text{Noeud4: } \dot{q}_L l + k \frac{l}{2} \frac{T_1^i - T_4^i}{l} + k \frac{l}{2} \frac{140 - T_4^i}{l} + kl \frac{T_5^i - T_4^i}{l} + e \cdot \frac{l^2}{2} = \rho \frac{l^2}{2} C \frac{T_4^{i+1} - T_4^i}{\Delta t}$$

$$\text{Noeud 5 (intérieur): } T_5^{i+1} = (1 - 4\tau) T_5^i + \tau \left(T_2^i + T_4^i + T_6^i + 140 + \frac{e l^2}{k} \right)$$

Noeud6:

$$hl(T_\infty - T_6^i) + k \frac{l}{2} \frac{T_3^i - T_6^i}{l} + kl \frac{T_5^i - T_6^i}{l} + kl \frac{140 - T_6^i}{l} + k \frac{l}{2} \frac{T_7^i - T_6^i}{l} + e \cdot \frac{3l^2}{4} = \rho \frac{3l^2}{4} C \frac{T_6^{i+1} - T_6^i}{\Delta t}$$

$$\text{Noeud7 } hl(T_\infty - T_7^i) + k \frac{l}{2} \frac{T_6^i - T_7^i}{l} + k \frac{l}{2} \frac{T_8^i - T_7^i}{l} + kl \frac{140 - T_7^i}{l} + e \cdot \frac{l^2}{2} = \rho \frac{l^2}{2} C \frac{T_7^{i+1} - T_7^i}{\Delta t}$$

$$\text{Noeud8: } h \frac{l}{2} (T_\infty - T_8^i) + k \frac{l}{2} \frac{T_7^i - T_8^i}{l} + k \frac{l}{2} \frac{140 - T_8^i}{l} + e \cdot \frac{l^2}{4} = \rho \frac{l^2}{4} C \frac{T_8^{i+1} - T_8^i}{\Delta t}$$

Ou $e = 2 \times 10^7 \text{ W/m}^3$, $\dot{q}_L = 8000 \text{ W/m}^2$, $l = 0.015 \text{ m}$, $k = 15 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$, $h = 80 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$, et $T_\infty = 25 \text{ °C}$.

La limite supérieure du pas de temps Δt est déterminée à partir des critères de stabilité qui nécessitent que le coefficient de T_m^i dans T_m^{i+1} l'expression (le coefficient primaire) soit supérieur ou égal à zéro pour tous les nœuds. Le plus petit coefficient primaire dans les 8 équations ci-dessus est le coefficient de T_3^i dans T_3^{i+1} l'expression car il est exposé à la plupart des convections par unité de volume (cela peut être vérifié), et donc les critères de stabilité pour ce problème peuvent être exprimés comme :

$$1 - 4\tau - 4\tau \frac{hl}{k} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \tau \leq \frac{1}{4(1 + hl/k)} \quad \rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{l^2}{4\alpha(1 + hl/k)}$$

Depuis $\tau = \alpha \Delta t / l^2$ En substituant les quantités données, la valeur maximale admissible du pas de temps est déterminée comme étant

$$\Delta t \leq \frac{(0.015 \text{ m})^2}{4(3.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})[1 + (80 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C})(0.015 \text{ m}) / (15 \text{ W/m} \cdot \text{°C})]} = 16.3 \text{ s}$$

Par conséquent, tout pas de temps inférieur à 16,3 s peut être utilisé pour résoudre ce problème. Pour plus de commodité, nous ne choisissons que le pas de temps soit $\Delta t = 15$ s. Ensuite, le nombre de Fourier maillé devient

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{l^2} = \frac{(3.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(15 \text{ s})}{(0.015 \text{ m})^2} = 0.2133 \quad (\text{Pour } \Delta t = 15 \text{ s})$$

En utilisant la condition initiale spécifiée comme solution au temps $t = 0$ (pour $i = 0$), le balayage des 9 équations ci-dessus donnera la solution à des intervalles de 15 s. À l'aide d'un ordinateur, la solution au nœud du coin supérieur (nœud 3) est déterminée à 441, 520 et 529 ° C à 2, 5 et 30 min, respectivement. On peut montrer que la solution d'état stationnaire au nœud 3 est 531 ° C.

Time [s]	T ₁ [C]	T ₂ [C]	T ₃ [C]	T ₄ [C]	T ₅ [C]	T ₆ [C]	T ₇ [C]	T ₈ [C]	Rangée
0	140	140	140	140	140	140	140	140	1
15	203.5	200.1	196.1	207.4	204	201.4	200.1	200.1	2
30	265	259.7	252.4	258.2	253.7	243.7	232.7	232.5	3
45	319	312.7	300.3	299.9	293.5	275.7	252.4	250.1	4
60	365.5	357.4	340.3	334.6	326.4	300.7	265.2	260.4	5
75	404.6	394.9	373.2	363.6	353.5	320.6	274.1	267	6
90	437.4	426.1	400.3	387.8	375.9	336.7	280.8	271.6	7
105	464.7	451.9	422.5	407.9	394.5	349.9	286	275	8
120	487.4	473.3	440.9	424.5	409.8	360.7	290.1	277.5	9
135	506.2	491	456.1	438.4	422.5	369.6	293.4	279.6	10
...
...
1650	596.3	575.7	528.5	504.6	483.1	411.9	308.8	288.9	111
1665	596.3	575.7	528.5	504.6	483.1	411.9	308.8	288.9	112
1680	596.3	575.7	528.5	504.6	483.1	411.9	308.8	288.9	113
1695	596.3	575.7	528.5	504.6	483.1	411.9	308.8	288.9	114
1710	596.3	575.7	528.5	504.6	483.1	411.9	308.8	288.9	115
1725	596.3	575.7	528.5	504.6	483.1	411.9	308.8	288.9	116
1740	596.3	575.7	528.5	504.6	483.1	411.9	308.8	288.9	117
1755	596.3	575.7	528.5	504.6	483.1	411.9	308.8	288.9	118
1770	596.3	575.7	528.5	504.6	483.1	411.9	308.8	288.9	119
1785	596.3	575.7	528.5	504.6	483.1	411.9	308.8	288.9	120

Tableau V.2

Variation de $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ et T_8 avec le temps obtenues par la méthode explicite

Bibliographie

1. H.K. Versteeg, W Malalasekera, An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method, Longman (1998).
2. S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, Washington D.C (1980),
3. D.R. Croft, D.G. Lilley, Heat transfer calculations using finite difference equations, Elsevier science and technologie (1977)
4. W.J. Minckowicz, E.M. Sparrow, J.Y. Murthy, Handbook of numerical heat transfer, Wiley (2006).
5. C.A.J. Fletcher, Computational techniques for fluid dynamics 1, Springer (1988).
6. M. Boumahrat et J. Gourdin, 'Méthodes Numériques Appliquées', Office des Publications Universitaires (OPU), 1983.
7. M. Necati Ozisik, "Finite Difference Methods in Heat Transfer"; Mechanical and Aerospace Engineering Department North Carolina State University