Chapitre 2

Processus linéaires

2.1 Processus stationnaires

Un processus linéaire est un processus stochastique X_t formé par une combinaison linéaire (non nécessairement finie) de bruits blancs. On définit également la classe des processus linéaires généraux, qui sont constitués de combinaisons linéaires de bruits blancs faibles. Introduisons formellement ces deux types de processus.

Définition 6 $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un processus linéaire (resp. linéaire général) de moyenne* μ *s'il peut être écrit sous la forme :*

$$X_t = \mu + \Sigma_{i=1}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}, \tag{2.1.1}$$

où ε_t est un bruit blanc, de variance σ_ε^2 est la suite des coefficients ψ_i est supposée telle que

$$\Sigma_{i=-\infty}^{+\infty}\psi_i^2 < \infty, \tag{2.1.2}$$

Le résultat suivant montre que les processus linéaires sont stationnaires.

Proposition 1 *Tout processus linéaire général $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et on a :*

$$\begin{cases} \gamma_X(0) = Var(X_t) = \sigma_\varepsilon^2\Sigma_{i=0}^{+\infty}\psi_i^2, \\ \gamma_X(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = \sigma_\varepsilon^2\Sigma_{i=0}^{+\infty}\psi_{i+h}\psi_i \end{cases}$$

Nous présentons maintenant deux résultats portant sur l'image de processus stationnaires par certaines transformations.

Proposition 2 *Soit $(w_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire et soit $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels absolument sommable (i.e. telle que $\Sigma_{i=1}^{+\infty}|\alpha_i| < \infty$). Alors le processus $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par*

$$Z_t = \Sigma_{i=1}^{+\infty}\alpha_i W_{t-i},$$

est stationnaire.

Définition 7 *(Inversibilité) Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet une représentation inversible de $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ si ce dernier (Le processus Z peut s'écrire* *comme combinaison linéaire de processus X, c'est-à-dire s'il existe une suite $(\beta_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tels que :*

$$Z_t = \Sigma_{i=1}^{+\infty}\beta_i X_{t-i},$$

Définition 8 *(Causalité) Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet une représentation causale s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des valeurs passées d'un autre processus, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(\psi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et un processus $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tels que*

$$X_t = \Sigma_{i=1}^{+\infty}\psi_i W_{t-i},$$

2.2 Introduction aux processus ARMA

Dans cette section, nous présentons, à titre d'exemple, certaines des principales propriétés d'une classe importante de processus linéaires connus sous le nom de processus ARMA (moyenne mobile autorégressive). Ceux-ci sont définis par des équations de différence linéaire avec des coefficients constants. Comme exemple, nous considérons le processus ARMA(1,1). Les processus ARMA d'ordre supérieur seront discutés au chapitre 3.

Définition 9 *Le processus stochastiques X_t est un ARMA(1,1) s'il est stationnaire et satisfait (pour chaque t)*

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \tag{2.2.1}$$

Où ε_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_ε^2.

En utilisant l'opérateur de retard B, (2.2.1) peut être écrite de façon plus abrégée comme

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \tag{2.2.2}$$

où $\Phi(B) = 1 - \phi B$, $\Theta(B) = 1 - \theta B$, respectivement.

Nous étudions d'abord les valeurs de ϕ et θ pour lesquelles existe une solution stationnaire de (2.2.1). Si $|\varphi| < 1$. Soit $\Psi(z)$ le développement de la série de puissance $1/\Phi(B)$, c'est-à-dire $\Sigma_{i=1}^{+\infty}\psi_i B^i$, qui a des coefficients absolument sommables. Donc l'application de $\Psi(B)$ à chaque côté de (2.2.2) donne

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t = \Sigma_{i=1}^{+\infty}\psi_i\varepsilon_{t-i} \tag{2.2.3}$$

où $\psi_0 = 1$ et $\psi_i = (\phi + \theta)\phi^{i-1}$ pour $i \geq 1$. D'où

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t = \varepsilon_t + \Sigma_{i=1}^{+\infty}(\phi + \theta)\phi^{i-1}\varepsilon_{t-i}$$

Nous résumons maintenant nos résultats sur l'existence et la nature des solutions stationnaires des récursions ARMA(1,1) (2.2.2) comme suit :

— Une solution stationnaire de l'ARMA (1,1) existe si et seulement si $\phi \neq \pm 1$.

— Si $|\phi| < 1$, alors la solution stationnaire unique est donnée par (2.2.3). Dans ce cas, nous dirons que X_t est causal ou une fonction causale de ε_t, puisque X_t peut être exprimé en termes de valeurs courantes et passées $(\varepsilon_s)_{s\leq t}$.

Tout comme la causalité signifie que X_t est exprimable en termes de $\varepsilon_s, s \leq t$, le concept d'inversibilité signifie que ε_t est exprimable en termes de $X_s, s \leq t$. Nous montrons maintenant que le processus ARMA(1,1) défini par (2.2.1) est inversible si $|\theta| < 1$. Pour démontrer cela, soit $\Pi(B)$ le développement de la série de puissance de $1/\Theta(B)$, c'est-à-dire, $\Sigma_{i=1}^{+\infty}\psi_i B^i$, qui a des coefficients absolument sommables. Il s'ensuit que

$$\varepsilon_t = \Pi(B)X_t = \Sigma_{i=1}^{+\infty}\pi_i X_{t-i} \tag{2.2.4}$$

De la même manière que pour la causalité, nous concluons que si $|\theta| < 1$, alors le processus X_t est inversible.

2.3 Processus linéaire

Dans cette partie du cours, nous étudierons une classe de modèles appelés «modèles de séries chronologiques linéaires» conçus spécifiquement pour modéliser le comportement dynamique de séries temporelles. Il s'agit notamment des modèles de moyenne mobile (MA), autorégressifs (AR) et de moyenne mobile autorégressive (ARMA). Nous nous concentrerons sur des modèles univariés, mais ils ont des généralisations vectorielles très naturelles et très importantes (modèles VMA, VAR, VARMA).

Ces modèles de séries temporelles sont utiles pour diverses raisons dans l'économétrie appliquée :

— Modélisation de la corrélation sérielle dans les perturbations d'un modèle de régression.

— La prévision hors de l'échantillon (univariée, multivariée).

— Fournir des informations sur les propriétés dynamiques d'une variable de série temporelle.

— Les versions vectorielles de ces modèles sont devenues beaucoup plus importantes que les systèmes traditionnels d'équations simultanées pour l'étude des relations structurelles dans les systèmes macroéconomiques.

Le processus de bruit blanc ε_t est le processus de base dans la construction des séries chronologiques, ils vérifient les propriétées suivantes :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0;\ \forall t \\ E(\varepsilon_t^2) &= \sigma^2;\ \forall t \\ E(\varepsilon_t \varepsilon_s) &= 0;\ \forall t \neq s \end{aligned}$$

Définition 10 *Le processus stochastique X_t est appelé processus de moyenne mobile d'ordre q noté $MA(q)$ si :*

$$X_t = \mu + \theta_0 \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \text{ où } \ \theta_0 = 1 \tag{2.3.1}$$

Notons qu'un processus $MA(q)$ est un processus stationnaire.

$$\begin{aligned}
E(X_t) &= E\Big(\mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}\Big) \\
&= \mu + \theta_0 E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) + \ldots + E(\theta_q\varepsilon_{t-q}) \\
&= \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X_t - \mu)^2 &= E\Big(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}\Big)^2 \\
&= \Big(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2)\sigma^2 \quad \text{(On sait que} E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0 \ \forall t \neq s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_X(1) &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \mathrm{Cov}(X_{t+1}, X_t) \\
&= E\Big(\Big(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}\Big)\Big(\varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-1-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q-1}\Big)\Big) \\
&= \mu
\end{aligned}$$

Plus généralement

$$\begin{aligned}
\gamma_X(l) &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-l}) = \mathrm{Cov}(X_{t+l}, X_t) \\
&= E\Big(\Big(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}\Big)\Big(\varepsilon_{t-l} + \theta_1\varepsilon_{t-l-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q-l}\Big)\Big) \\
&= \begin{cases} \sigma^2\Sigma_{i=0}^{l-q}\theta_{l+i}\theta_i, & \text{pour j=0 ;q} \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}
\end{aligned}$$

La suite des autocovariances d'un processus stationnaire de covariance, $\gamma_X(l)$ pour $l = 0, 1, ...$ est appelée fonction d'autocovariance ou covariagramme du processus. La suite correspondante d'autocorrélations, $\rho(l) = \gamma_X(l)/\gamma_X(0)$ est appelée la fonction d'autocorrélation ou le corrélogramme du processus. Ainsi, le covariogramme et le corrélogramme du $MA(q)$,

1. sont complètement déterminés par les $q+1$ paramètres $\theta_1, ..., \theta_q$ et σ^2.
2. est égal à zéro pour tout $j > q$.

Une généralisation naturelle du processus $MA(q)$ est le processus $MA(\infty)$

2.4 Estimations des fonctions caractéristiques

Soit X_t un processus stationnaire de moyenne $\mu = E(X_t)$, de fonctions d'autocovariance γ_X et de fonctions d'autocorrélation ρ. On dispose en pratique de l'observation du processus jusqu'à l'instant t soit de $x_1, ..., x_t$.

2.4.1 Estimation de la moyenne

On estime généralement la moyenne du processus par la moyenne empirique

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} x_i$$

Proprieté 1 *La moyenne empirique vérifie*

— $\overline{X}$ *est un estimateur sans biais de* μ.

— $Var(\overline{X}) = \frac{1}{n}\Sigma_{|h|<n-1}(1-\frac{|h|}{n})\gamma_X(h)$

— *si les* X_t *sont iid, alors* $Var(\overline{X}) \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$.

Preuve 1 *Pour le premier point nous le laissons en exercice, tandis les autres points :*

— *On a*

$$\begin{aligned} n\,Var(\overline{X}) &= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{n-i} Cov(X_i, X_{i+h}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{n-i} \gamma_X(h) \\ &= \Sigma_{|h|<n-1}(1-\frac{|h|}{n})\gamma_X(h). \end{aligned}$$

— *Sous la condition que les* X_t *sont iid, on a :*

$$\begin{aligned} Var(\overline{X}) &= \frac{1}{n} Var(X_1) \\ &= \frac{1}{n}\gamma_X(0) \\ &\underset{n\to\infty}{\xrightarrow{a.s.}} 0 \end{aligned}$$

Remarque 4 *Les variables ne sont cependant pas nécessairement indépendantes ce qui nous empêche d'appliquer la loi forte des grands nombres. Par contre, la proposition suivante donne une condition suffisante de convergence en moyenne quadratique.*

Proposition 3 *Soit X_t un processus stationnaire de moyenne μ et de fonction d'autocovariance γ_X. Si $\Sigma_{h=0}^{\infty}|\gamma_X(h)| < \infty$, alors*

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 \underset{n\to\infty}{\overset{a.s.}{\longrightarrow}} 0.$$

On dit alors que ce processus est ergodique (pour l'espérance).

Preuve 2 *A faire en exercice.*

2.4.2 Estimation de la fonction d'autocovariance

Pour construire un estimateur de la fonction d'autocovariance, rappelons que si $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ sont des observations bivariées i.i.d. de variance finie, un estimateur de la covariance entre X et Y est donné par

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$$

On estime donc naturellement la fonction d'autocovariance par

$$\widehat{\gamma}(h) = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n-|h|}(x_i - \overline{X})(x_{i+h} - \overline{X})$$

Il est appelé l'autocovariance empirique.

Proprieté 2 *On peut montrer que*

— *$\widehat{\gamma}(h)$ est un estimateur biaisé de $\gamma(h)$.*

— *Sous certaines conditions, on peut montrer que* $\widehat{\gamma}(h)$ *est asymptotiquement non biaisé.*

— *Si* (X_t) *un processus stationnaire gaussien et si la série de terme général* $\gamma(h)$ *est absolument convergente, alors* $\widehat{\gamma}(h)$ *converge en moyenne quadratique vers* $\gamma(h)$*.*

2.5 Exercices

Exercice 2.1 *Soit* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc, vérifier que les processus définis par :*

1. $X_t = \varepsilon_t, \forall t \in \mathbb{Z}$,
2. $Y_t = (-1)^t \varepsilon_t, \forall t \in \mathbb{Z}$.

sont stationnaires.
Montrer que leur somme $Z_t = X_t + Y_t, \forall t \in \mathbb{Z}$ *n'est pas un processus stationnaire.*

Exercice 2.2 *Parmi les séries chronologiques suivantes, déterminer celles qui sont centrées, stationnaires.*

1. $X_t = \frac{1}{t}\varepsilon_t$
2. $X_t = 0.2\varepsilon_t + t$
3. $X_t = \varepsilon_t^2 + 0.5\varepsilon_{t-1} + c^{st}$
4. $X_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$

Exercice 2.3 *Soit* $\{Z_t\}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi normale de moyenne 0 et de variance* σ^2*, et soit a, b et c des constantes. Déterminer lequel ou lesquels des processus ci-dessous sont stationnaires. Pour chaque processus stationnaire, calculer la moyenne et la fonction d'autocovariance.*

1. $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-2}$

2. $X_t = Z_1 \cos(ct) + Z_2 \sin(ct)$

3. $X_t = Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct)$

4. $X_t = a + bZ_0$

5. $X_t = Z_t Z_{t-1}$

Indication *:* $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ *et* $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$*.*

Exercice 2.4 *Soit* $\{X_t\}$ *et* $\{Y_t\}$ *deux séries stationnaires et non corrélées, c'est-à-dire que* $\mathrm{Cov}(X_r, Y_s) = 0$ *pour tous* r *et* s*. Démontrer que* $\{X_t + Y_t\}$ *est stationnaire avec fonction d'autocovariance égale à la somme des fonctions d'autocovariance de* $\{X_t\}$ *et* $\{Y_t\}$*.*