Série d'éxercices N°2

Exercice 1 *Pour montrer que les processus X_t et Y_t sont stationnaires, il faut vérifier que leur moyenne et leur covariance ne dépendent pas du temps t.*

* *Tout d'abord, pour le processus X_t, on a :*

— *La moyenne :* $\mathrm{E}[X_t] = \mathrm{E}[\epsilon_t] = 0$*, car le bruit blanc a une moyenne nulle pour tout t.*

— *La covariance :* $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathrm{E}[\epsilon_s \epsilon_t] = 0$ *si* $s \neq t$*, car les termes* ϵ_s *et* ϵ_t *sont indépendants pour* $s \neq t$*, et* $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathrm{Var}(\epsilon_t)$ *si* $s = t$*, car la variance de* ϵ_t *est constante pour tout t. Ainsi, le processus* X_t *est stationnaire.*

* *Pour le processus Y_t, on a :*

— *La moyenne :* $\mathrm{E}[Y_t] = \mathrm{E}[(-1)^t \epsilon_t] = 0$*, car le bruit blanc a une moyenne nulle pour tout t et* $(-1)^t$ *prend les valeurs 1 et -1 de manière alternée.*

— *La covariance :* $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = \mathrm{E}[(-1)^s \epsilon_s (-1)^t \epsilon_t] = \mathrm{E}[\epsilon_s \epsilon_t]$ *si s et t sont de même parité, et* $-\mathrm{E}[\epsilon_s \epsilon_t]$ *si s et t sont de parités différentes. Dans tous les cas, la covariance ne dépend que de la différence* $|s - t|$ *et non du choix de s et t.*

Ainsi, le processus Y_t *est également stationnaire.*

* *Cependant, leur somme* $Z_t = X_t + Y_t$ *n'est pas stationnaire. En effet, la moyenne de* Z_t *est* $\mathrm{E}[Z_t] = \mathrm{E}[X_t] + \mathrm{E}[Y_t] = 0$ *pour tout t, mais la covariance* $\mathrm{Cov}(Z_s, Z_t)$ *dépend du choix de s et t :*

Si s et t sont de même parité, alors $\mathrm{Cov}(Z_s, Z_t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) + \mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = 2\mathrm{Var}(\epsilon_t)$*, qui dépend de t. Si s et t sont de parités différentes, alors* $\mathrm{Cov}(Z_s, Z_t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) - \mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = 0$*, car* $\mathrm{Var}(\epsilon_t) = \mathrm{Var}(-\epsilon_t)$*. Ainsi,* Z_t *n'est pas un processus stationnaire.*

Exercice 2 *Pour déterminer si une série chronologique est centrée, il faut vérifier si sa moyenne est nulle pour tout t. Pour déterminer si une série chronologique est stationnaire, il faut vérifier si sa moyenne et sa covariance ne dépendent pas du temps t.*

— $X_t = \frac{1}{t}\epsilon_t$ *: Cette série n'est pas centrée car sa moyenne n'est pas nulle pour tout t. En effet, on a* $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\frac{1}{t}\epsilon_t] = \frac{1}{t}\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0$ *si et seulement si* $\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0$*, ce qui est pas garanti du fait que* ϵ_t *est un bruit blanc. Cette série est stationnaire car sa moyenne est nulle.*

— $X_t = 0.2\epsilon_t + t$: *Cette série n'est pas centrée car sa moyenne n'est pas nulle pour tout t. On a* $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[0.2\epsilon_t + t] = 0.2\mathbb{E}[\epsilon_t] + t$, *qui dépend de t. Cette série n'est pas non plus stationnaire car sa moyenne dépend du temps t.*

— $X_t = \epsilon_t^2 + 0.5\epsilon_{t-1} + c$: *Cette série est centrée car sa moyenne est constante pour tout t. On a* $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\epsilon_t^2 + 0.5\epsilon_{t-1} + c] = \mathbb{E}[\epsilon_t^2] + 0.5\mathbb{E}[\epsilon_{t-1}] + \mathbb{E}[c] = \sigma_\epsilon^2 + 0 + c = \sigma_\epsilon^2 + c > 0$. *Cette série n'est pas centré, stationnaire car sa moyenne dépend de t.*

— $X_t = \epsilon_t + 2\epsilon_{t-1}$: *Cette série est centrée car sa moyenne est nulle pour tout t. On a* $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\epsilon_t + 2\epsilon_{t-1}] = \mathbb{E}[\epsilon_t] + 2\mathbb{E}[\epsilon_{t-1}] = 0 + 0 = 0$. *Cette série est également stationnaire car sa moyenne est nulle pour tout t et sa covariance ne dépend que de la différence* $|s-t|$, *et non du choix de s et t.*

On a $Cov(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(\epsilon_s + 2\epsilon_{s-1})(\epsilon_t + 2\epsilon_{t-1})] = \mathbb{E}[\epsilon_s\epsilon_t] + 2\mathbb{E}[\epsilon_{s-1}\epsilon_t] + 2\mathbb{E}[\epsilon_s\epsilon_{t-1}] + \mathbb{E}[\epsilon_{s-1}\epsilon_{t-1}]$. *En utilisant le fait que le bruit blanc est non corrélé, on obtient*

$$\gamma_X = \begin{cases} (0.5^2 + 1)\sigma_\varepsilon & si\ s - t = 0 \\ 0.5\sigma_\varepsilon^2 & si\ s - t = \pm 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

donc le processus X_t *est stationnaire.*

Exercice 3 *Pour déterminer si les processus sont stationnaires, nous devons vérifier si leur moyenne et leur variance sont constantes au fil du temps, comme on doit vérifier que la fonction d'autocovariance* $cov(X_t, X_{t-k})$ *dépond du décalae k.*

1. $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-2}$

   * *La moyenne de* X_t *est*

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E[a + bZ_t + cZ_{t-2}] \\ &= a + bE[Z_t] + cE[Z_{t-2}] \\ &= a \text{ car les } Z_t \text{ sont centrées.} \end{aligned}$$

* *La fonction d'autocovariance de* X_t *et* X_{t-k} *est*

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t-k}) &= Cov(a + bZ_t + cZ_{t-2}, a + bZ_{t-k} + cZ_{t-k-2}) \\ &= b^2 Cov(Z_t, Z_{t-k}) + c^2 Cov(Z_{t-2}, Z_{t-k-2}) \\ &= \sigma^2(b^2 + c^2)\delta_k, \end{aligned}$$

où δ_k *est la fonction delta de Kronecker. Donc la fonction d'autocovariance ne dépend que de la distance temporelle entre les deux points, ce qui indique que le processus est stationnaire. Sa moyenne est a et sa fonction d'autocovariance est* $s^2(b^2 + c^2)\delta_k$.

2. $X_t = Z_1 cos(ct) + Z_2 sin(ct)$

— *La moyenne de* X_t *est*

$$E[X_t] = E[Z_1 cos(ct) + Z_2 sin(ct)] = 0$$

car les Z_t *sont centrées.*

— *La fonction d'autocovariance de* X_t *et* X_{t-k} *est*

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t-k}) &= Cov(Z_1 cos(ct) + Z_2 sin(ct), Z_1 cos(c(t-k)) + Z_2 sin(c(t-k))) \\ &= E[Z_1^2 cos(ct) cos(c(t-k)) + Z_2^2 sin(ct) sin(c(t-k))] \\ &= s^2/2 cos(ck). \end{aligned}$$

Donc la fonction d'autocovariance dépend que de la distance temporelle entre les deux points, ce qui indique que le processus est stationnaire.

3. $X_t = Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct)$

— *La moyenne de* X_t *est* $E[X_t] = E[Z_t \cos(ct)] + E[Z_{t-1} \sin(ct)] = 0$ *car les* Z_t *sont centrées.*

— *La fonction d'autocovariance de X_t et X_{t-k} est*

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_{t-k}) &= E[(Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct))(Z_{t-k} \cos(c(t-k)) + Z_{t-k-1} \sin(c(t-k)))]. \\
&= \sigma^2(\cos(ct)\cos(c(t-k)) + \sin(ct)\sin(c(t-k))) \\
&= \sigma^2 \cos(c(t-t+k)) \\
&= \sigma^2 \cos(ck).
\end{aligned}$$

Donc la fonction d'autocovariance dépend de la distance temporelle entre les deux points, ce qui indique que le processus est stationnaire.

4. $X_t = a + bZ_0$

— *La moyenne de X_t est $E[X_t] = E[a + bZ_0] = a + bE[Z_0] = a$ car Z_0 a une moyenne de 0.*

— *La fonction d'autocovariance de X_t et X_{t-k} est*

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_{t-k}) &= Cov(a + bZ_0, a + bZ_{0-k}) \\
&= b^2 Cov(Z_0, Z_{0-k}) \\
&= b^2\sigma^2\delta_k,
\end{aligned}$$

où δ_k est la fonction delta de Kronecker. Donc la fonction d'autocovariance ne dépend que de la distance temporelle entre les deux points, ce qui indique que le processus est stationnaire. Sa moyenne est a et sa fonction d'autocovariance est $\sigma^2 b^2 \delta_k$.

5. $X_t = Z_t Z_{t-1}$

— *La moyenne de X_t est $E[X_t] = E[Z_t Z_{t-1}] = E[Z_t]E[Z_{t-1}] = 0$ car les Z_t sont centrées.*

— *La fonction d'autocovariance de X_t et X_{t-k} est*

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_{t-k}) &= Cov(Z_t Z_{t-1}, Z_{t-k} Z_{t-k-1}) \\
&= E[Z_t Z_{t-1} Z_{t-k} Z_{t-k-1}] \\
&= \sigma^4 \delta_k,
\end{aligned}$$

où δ_k est la fonction delta de Krone

Exercice 4 *On doit démontrer que le processus $Z_t = X_t + Y_t$ est stationnaire, c'est-à-dire que sa moyenne et sa fonction d'autocovariance ne dépendent pas du temps.*

Tout d'abord, la moyenne de Z_t est

$$E[Z_t] = E[X_t + Y_t] = E[X_t] + E[Y_t]$$

car les deux séries sont stationnaires, donc leur moyenne est constante et ne dépend pas du temps. Ainsi, $E[Z_t] = \mu_X + \mu_Y$, où μ_X et μ_Y sont les moyennes respectives des séries X_t et Y_t.

Maintenant, calculons la fonction d'autocovariance de Z_t et Z_{t-k}, où k est un décalage temporel. On a :

$$\begin{aligned} Cov(Zt, Zt-k) &= Cov(Xt+Yt, Xt-k+Yt-k) \\ &= Cov(Xt, Xt-k) + Cov(Yt, Yt-k)(\textit{par la non-corrélation de } X_t \textit{ et } Y_t) \\ &= \gamma_X(k) + \gamma_Y(k) \end{aligned}$$

où $\gamma_X(k)$ et γ_Y sont les fonctions d'autocovariance des séries X_t et Y_t,respectivement.

Ainsi, la fonction d'autocovariance de Z_t est la somme des fonctions d'autocovariance de X_t et Y_t, qui ne dépendent pas du temps, donc la fonction d'autocovariance de Z_t ne dépend pas du temps. Par conséquent, Z_t est un processus stationnaire.

En conclusion, nous avons montré que $X_t + Y_t$ est un processus stationnaire avec une fonction d'autocovariance égale à la somme des fonctions d'autocovariance de X_t et Y_t.