Corrigé du Serie d'exercices 02

Solution d'exercice 01 :

Les caractéristiques élémentaires sont :

Élément 1 : L , E , A , c = 1 , s = 0

Élément 2 : 2L , E , A , c = 1 , s = 0

Élément 3 : 3 L , E , A , c = 0 , s = 1

D'ou les matrices de rigidité élémentaires :

$$[\boldsymbol{K_{12}}] = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{K_{23}}] = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{2L}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{2L}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{K_{24}}] = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{3L}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{3L}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ -3P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[K]=\frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&\frac{3}{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\\u_3\\v_3\\u_4\\v_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\P\\-3P\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}\Rightarrow\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\v_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P\\-3P\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u_2=\frac{2PL}{3EA}} \quad , \quad \boldsymbol{v_2=-9\,\frac{PL}{EA}}$$

$$[K]=\frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\-1&0&\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{3}&0&0&0&-\frac{1}{3}\\0&0&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-\frac{1}{3}&0&0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\u_2\\v_2\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}R_{x1}\\R_{y1}\\P\\-3P\\R_{x3}\\R_{y3}\\R_{x4}\\R_{y4}\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R_{x1}=-\frac{2P}{3}} \quad , \quad \boldsymbol{R_{y1}=0} \quad , \quad \boldsymbol{R_{x3}=-\frac{P}{3}} \quad , \quad \boldsymbol{R_{y3}=0} \quad , \quad \boldsymbol{R_{x4}=0} \quad , \quad \boldsymbol{R_{y4}=3P}$$

L’équilibre de la structure est vérifié :

$$\boldsymbol{F_{x1}+F_{x2}+F_{x3}+F_{x4}=-\frac{2P}{3}+P-\frac{P}{3}+0=0}$$

$$\boldsymbol{F_{y1}+F_{y2}+F_{y3}+F_{y4}=0-3P+0+3P=0}$$

Calcul des efforts normaux

Les efforts normaux sont :

$$\boldsymbol{N_{1-2}=\frac{EA}{L}\,[1(u_2-u_1)+0(v_2-v_1)]\ =\frac{2P}{3}}>0 \text{ (traction)}$$

$$\boldsymbol{N_{2-3}=\frac{EA}{2L}\,[1(u_3-u_2)+0(v_3-v_2)]\ =-\frac{P}{3}}<0 \text{ (compression)}$$

$$\boldsymbol{N_{4-2}=\frac{EA}{3L}\,[0(u_2-u_4)+1(v_2-v_4)]\ =-3P}<0 \text{ (compression)}$$

Dimensionnement

Le dimensionnement en contrainte s'écrit :

$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \frac{3P}{A} < \sigma_E$

soit : $A = c^2 > \frac{3P}{\sigma_E} = \frac{3\times 25000}{300}$

d'ou : $c > 15.81mm$

Solution d'exercice 02 :

Les caractéristiques élémentaires sont :

Élément 1 : $\sqrt{2}$ **L , E , A , c = s =** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Élément 2 : L , E , A , c = 1 , s = 0

D'ou les matrices de rigidité élémentaires :

$$[\boldsymbol{K_{12}}] = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{2\sqrt{2}L}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{K_{23}}] = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2\sqrt{2}+1 & 1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}+1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{EA}{2\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

$\boldsymbol{u_2 = \frac{PL}{EA}}$, $\boldsymbol{v_2 = -(1+2\sqrt{2})\ \frac{PL}{EA}}$

$$[K]=\frac{EA}{2\sqrt{2}L}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 2\sqrt{2}+1 & 1 & -2\sqrt{2} & 0\\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\u_2\\v_2\\0\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}R_{x1}\\R_{y1}\\0\\-P\\R_{x3}\\R_{y3}\end{Bmatrix}\Rightarrow\frac{EA}{2\sqrt{2}L}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\\ -2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\v_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}R_{x1}\\R_{y1}\\R_{x3}\\R_{y3}\end{Bmatrix}$$

d'ou : $\boldsymbol{R_{x1} = R_{y1} = P}$, $\boldsymbol{R_{x3} = -P}$, $\boldsymbol{R_{y3} = 0}$

L'équilibre de la structure est vérifié :

$\boldsymbol{F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} = P + 0 - P = 0}$

$\boldsymbol{F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} = P - P + 0 = 0}$

Calcul des efforts normaux

Les efforts normaux sont :

$$\boldsymbol{N_{1-2} = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(u_2 - u_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(v_2 - v_1)\right] = -\sqrt{2}\,P} < 0 \text{ (compression)}$$

$$\boldsymbol{N_{2-3} = \frac{EA}{L}\,[1(u_3 - u_2) - 0(v_3 - v_2)] = -P} < 0 \text{ (compression)}$$

Dimensionnement

Le dimensionnement en contrainte s'écrit :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}P}{A} < \sigma_E$$

soit : $A = c^2 > \frac{\sqrt{2}P}{\sigma_E} = \frac{\sqrt{2}\times 10000}{300}$

d'ou : $c > 6.87\ mm$

<u>Solution exercice 03 :</u>

Les caractéristiques élémentaires sont :

Élément 1 : **L , E , A , c = 1 , s = 0**

Élément 2 : **L , E , A , c = 0 , s = 0**

Élément 3 : **$\sqrt{2}$ L , E , 2A , c = s = $\frac{1}{\sqrt{2}}$**

D'ou les matrices de rigidité élémentaires :

$$[\boldsymbol{K_{12}}] = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}}\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{K_{31}}] = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{K_{32}}] = \frac{\boldsymbol{EA}}{\sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{L}}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\cdot\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}+1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 & -1 & 1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ -2P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}+1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ -2P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -2P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u_2 = 3\frac{PL}{EA}} \quad , \quad \boldsymbol{v_2 = -(5+2\sqrt{2})\ \frac{PL}{EA}}, \quad \boldsymbol{v_3 = -2\ \frac{PL}{EA}}$$

$$[K] = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\cdot\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}+1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 & -1 & 1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ P \\ -2P \\ R_{x3} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x3} \end{Bmatrix}$$

d'ou : $\boldsymbol{R_{x1} = -3P}$, $\boldsymbol{R_{y1} = 2P}$, $\boldsymbol{R_{x3} = 2P}$

L'équilibre de la structure est vérifié :

$$\boldsymbol{F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} = -3P + P + 2P = 0}$$

$$\boldsymbol{F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} = 2P - 2P + 0 = 0}$$

Calcul des efforts normaux

Les efforts normaux sont :

$$\boldsymbol{N_{1-2}} = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}}\ [\mathbf{1}(\boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{u_1}) + \mathbf{0}(\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1})]\ = \mathbf{3}\boldsymbol{P} > \mathbf{0} \text{ (traction)}$$
$$\boldsymbol{N_{3-1}} = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}}\ [\mathbf{0}(\boldsymbol{u_3} - \boldsymbol{u_1}) - \mathbf{1}(\boldsymbol{v_3} - \boldsymbol{v_1})]\ = \mathbf{2}\boldsymbol{P} > \mathbf{0} \text{ (traction)}$$
$$\boldsymbol{N_{3-2}} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{EA}}{\sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{L}}\left[\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(\boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{u_3}) + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_3})\right]\ = -\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{P} < \mathbf{0} \text{ (compression)}$$

Les contraintes normales sont :

$$\boldsymbol{\sigma_{1-2}} = \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{A}} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma_{3-1}} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{A}} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma_{3-2}} = \frac{-\sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{A}}$$

Dimensionnement

Le dimensionnement en contrainte s’écrit :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \frac{\mathbf{3}P}{A} < \sigma_E$$

soit : $A = \frac{\pi \times D^2}{4} > \frac{\mathbf{3}P}{\sigma_E} \rightarrow\ D^2 > \frac{12\times P}{\pi \times \sigma_E} = \frac{12\times 25000}{3.14\times 300}$

d’ou : $D > 17.85\ mm$