Table des matières

Chapitre 1

Topologie de $\mathbb{R}^n$

1.1 Espace $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1.1. *L'espace $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-tuples ordonnées $(x_{1,}x_2, ..., x_n)$ de réels.*
On munit $\mathbb{R}^n$des deux opérations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x, y &\in \mathbb{R}^n;\ x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \\ \forall x &\in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \Bbbk\ \ (\Bbbk = \mathbb{R}\ \ ou\ \ \Bbbk = \mathbb{C});\ \lambda x = (\lambda x_{1,} \lambda x_2, ..., \lambda x_n). \end{aligned}$$

Avec ces deux opérations, on vérifie que $\mathbb{R}^n$est un éspace véctoriel sur $\Bbbk$ de dimension n.

1.2 Norme

Définition 1.2.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un éspace véctoriel sur $\Bbbk$ ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\Bbbk = \mathbb{C}$). On appelle norme sur E, toute application :*

$$\begin{array}{cccc} N: & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & N(x) = \ ||x|| \end{array} \tag{1.1}$$

vérifiant pour tout vécteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$*et pour tout* $\lambda \in \mathbb{k}$ *les propriétés suivantes ::*
a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
c) $\left\|x + y\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\|$ *(inégalité triangulaire).*

1.3 Espace véctoriel normé

Définition 1.3.1. *Si l'éspace E muni d'une norme, on dira que E est un éspace véctoriel normé, et est noté par* $(E, \|.\|)$.

1.4 Normes usuelles sur $\mathbb{k}^p$

Exemple 1.4.1. *Dans les trois exemple qui suivent, soit* $E = \mathbb{k}^p$ *et soit* $x = (x_1, ..., x_p) \in E$.
1. *L'application* $x \mapsto N_\infty = \|x\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq p} \{|x_i|\}$ *, est une norme.*
2. *L'application* $x \mapsto N_1 = \|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{p} |x_i|$ *, est une norme.*
3.*L'application* $x \mapsto N_1 = \|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2}$*, est une norme, appelée norme euclidienne.*

1.5 Produit scalaire sur un espace vectoriel

Définition 1.5.1. *L'application* $\langle ., . \rangle : E \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i, \text{ pour tout } x, y \in E. \tag{1.2}$$

définie un produit scalaire.

Remarque 1.1. *Nous avons donc les propriétés suivantes :*

1. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$.
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
4. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ *(bilinéaire).*
5. *Si* $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ *(Egalité de Pythagore).*
6. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$ *.(Inégalité de Cauchy-Schwarz).*

1.6 Normes équivalentes

Définition 1.6.1. *Deux normes N_1 et N_2 définies sur même éspace véctoriel normé E, sont dites équivalentes, si et seulement s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :*

$$\forall x \in E : \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x). \tag{1.3}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.6.1. *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les normes N_∞, N_1 et N_2 sur $E = \mathbb{k}^p$, sont équivalentes deux à deux, et pour tout $x \in E$ on a :*

$$N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq \sqrt{p} N_2(x) \leq p N_\infty(x). \tag{1.4}$$

Démonstration. La relation $N_\infty(x) \leq N_1(x)$ est évidente, car $N_1(x)$ est égal à la somme de $N_\infty(x)$.

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$N_1^2(x) \leq (\sum_{i=1}^{p} 1 \times |x_i|)^2 \leq \sum_{i=1}^{p} 1^2 \times \sum_{i=1}^{p} |x_i|^2 = p N_2^2(x). \tag{1.5}$$

Par conséquent $N_1(x) \leq \sqrt{p} N_2(x)$.

Enfin, $N_\infty(x)$ est le plus grand des réels positifs $|x_i|$, $i = 1, ..., p$. Donc, la somme $\sum\limits_{i=1}^{p} |x_i|^2$ est constituée de p termes tous inférieurs ou égaux à $N_\infty^2(x)$.

On en déduit que :

$$N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} N_\infty^2(x)} = \sqrt{p N_\infty^2(x)} = \sqrt{p} N_\infty(x). \tag{1.6}$$

C'est-à dire : $N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq \sqrt{p} N_2(x) \leq p N_\infty(x)$. □

1.7 Boule ouverte et boule férmée

Définition 1.7.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace véctoriel normé, et soient $a \in E$ et r un réel strictement positif. On appelle boule ouverte (respectivement boule férmée) d'un éspace véctoriel normé, l'ensemble noté $B(a, r)$ (respectivement $\bar{B}(a, r)$) définie par :*

$$B(a, r) = \{x \in E \ / \ \|x - a\| < r.\} \tag{1.7}$$

(respectivement

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in E \ / \ \|x - a\| \leq r\}), \tag{1.8}$$

où a est le centre de la boule et r son rayon.

1.8 Voisinage d'un point

Définition 1.8.1. *On dit qu'une partie V de E (E éspace véctoriel normé) est un voisinage d'un point $a \in E$, si V contient une boule ouverte contenant a.*

1.9 Ensemble ouvert et ensemble fermé

Définition 1.9.1. ** Une partie U de E est ouverte lorsqu'elle est voisinage de chacun de ses points.*
** Une partie F de E est férmée lorsque son complémentaire dans E est un ensemble ouvert.*
** Une partie non vide F de E est férmée si est seulement si elle possède la propriété suivante : Toute suite de point de F qui converge dans E admet sa limite dans F.*

1.10 Ensemble compact

Définition 1.10.1. *Une partie non vide K de E est compacte si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifie :*
1) K est férmé et borné.

2) Toute suite de point de K contient une sous suite qui converge et dont la mème limite dans K.

1.11 Intérieur

Définition 1.11.1. *Soient E un éspace véctoriel normé, A un sous-ensemble non vide de E et a un élément de E. On dit que a est un point intérieur à A si A est un voisinage de a. Autrement dit, si :*

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* \,;\, B(a,r) \subset A. \tag{1.9}$$

L'ensemble des points intérieurs à A est noté $Int(A)$ ou $\overset{\circ}{A}$ et est appelé intérieur de A.