

Généralité :

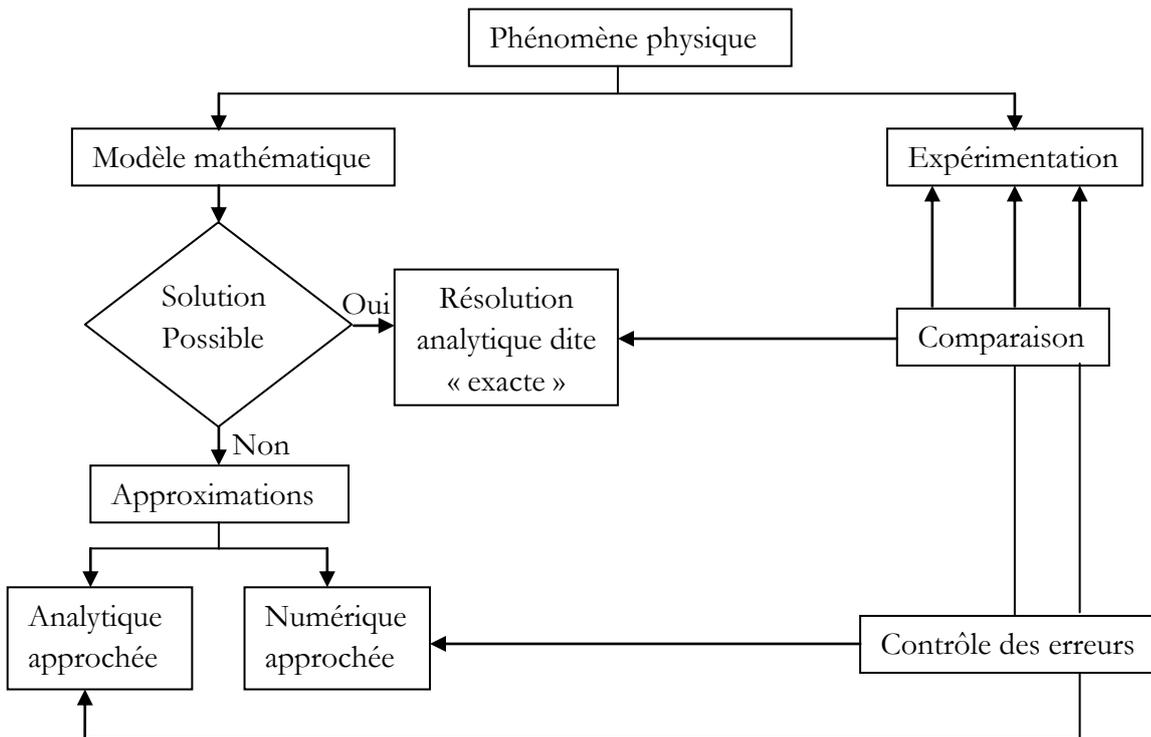
La simulation des phénomènes physique est le souci permanent de l'ingénieur dans sa démarche de conception, qui doit s'articuler sur une meilleure prévision du comportement des systèmes. Au 19^{ème} siècle, les expériences et les solutions analytiques étaient les seules moyennes d'analyse et d'interprétation. A l'aube du 20^{ème} siècle, la solution semi-analytique approchée (exemple : la méthode de Reyleigh-Ritz), devenait une alternative sérieuse aux solutions purement analytique. Depuis l'apparition des moyens de calcul au cours des années 60, la puissance des méthodes numériques s'est rapidement développée pour devenir l'outil principal de modélisation des systèmes complexes et variés.

De nos jours, l'approche numériques s'avère indispensable pour résoudre les systèmes réels rencontrés dans les différents secteurs de l'ingénierie. La méthode des éléments finis, la diversité des applications de cette méthode témoigne de son intérêt dans le calcul des structures.

Solution exacte et approchée :

Le comportement d'un système physique est décrit par des modèles mathématiques, en général, sous forme équations différentielles ou équations aux dérivées partielle. Si des solutions analytiques existent pour ce modèle, la solution est dite « exacte ». Elle servira comme solution de référence ; dans la pratique, ceci n'existe que pour des systèmes extrêmement simplifiés (e.g. plaque rectangulaire sur appuis simple soumise à une pression uniforme). Dans le cas où la solution analytiques n'existent pas, des approximations sont alors indispensables ; l'ingénieur accepte une solution imprécise du moment que l'erreur est estimée ; *en tout cas, c'est mieux que rien du tout !* Deux familles d'approximation sont envisageables : analytique et numérique. La solution analytique approchée consiste à poser les hypothèses permettant de résoudre analytiquement le modèle mathématique (l'erreur est donc d'origine analytique). Par ailleurs, la solution numérique approchée considère le modèle mathématique originale, mais introduit l'approximation au niveau de la technique de résolution (l'erreur est donc d'origine analytique).

En parallèle, la validation des modèles mathématique et numériques n'est possible qu'à travers une confrontation avec l'expérimentation (entachée elle-aussi d'erreurs expérimentale).



1. Notions introductives :

La méthode des éléments finis (abrégée MEF, ou FEM finite élément method en anglais) est une méthode de calcul numérique est utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles, qui ayant un profond caractère plus physique qu'abstrait, a été inventée plutôt par les ingénieurs que par les mathématiciens.

Cette méthode a été appliquée pour la première fois dans des problèmes liés à l'analyse des contraintes et depuis, elle a été étendue dans d'autres problèmes liés au milieu continu.

Dans toutes les applications l'analyste recherche à calculer une quantité de champ, comme par exemple :

Application	Quantité de champ
Mécanique des solides	Champ des contraintes ou champ des déplacements
Transfer de chaleur	Champ de température ou flux de chaleur
Mécanique des fluides	Fonction de courant ou fonction du potentiel de vitesse

1.1. Eléments utilisée :

1.1.1. Discrétisation :

Une structure réelle est constituée d'un certain nombre de points singuliers (joints, connexion, points anguleux,...) appelés « nœuds physiques » ; ce sont les points permettant la définition de la

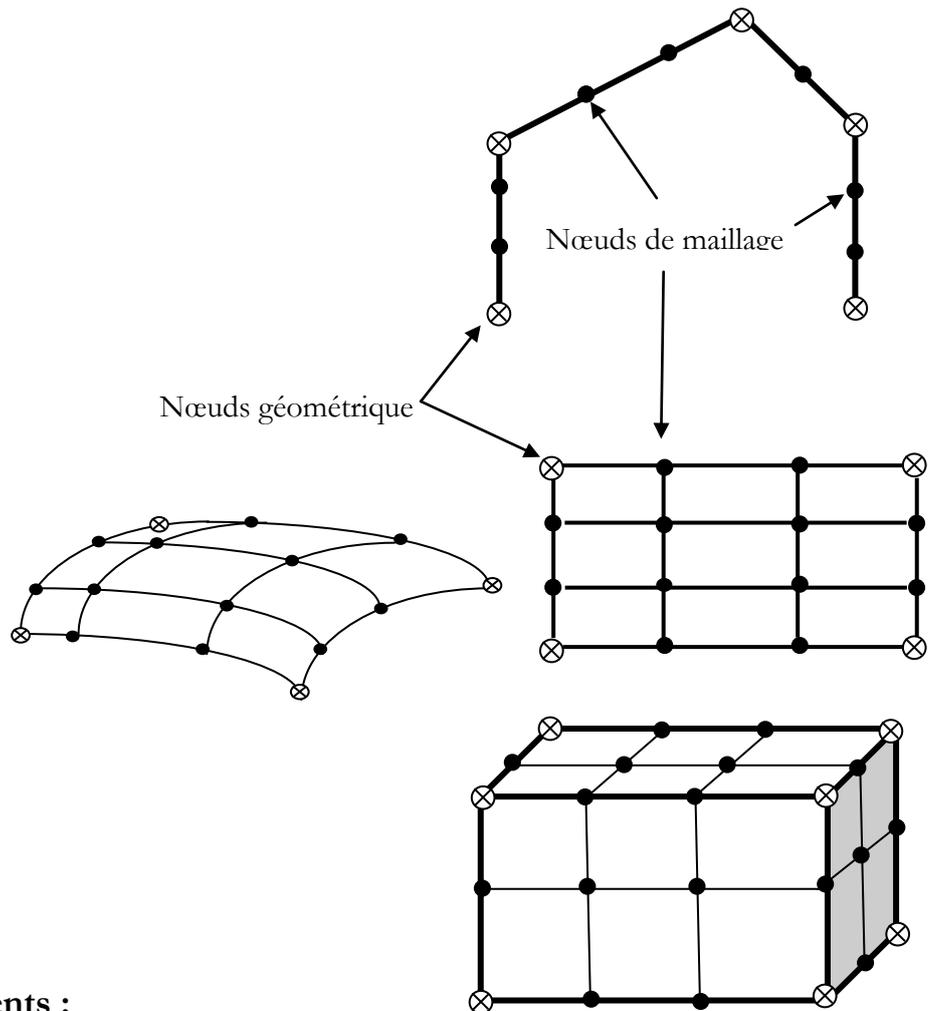
géométrie. Dans les structures en portique (poteaux-poutres), les nœuds physiques sont naturellement les assemblages (intersection) des poteaux et des poutres. Par ailleurs, la modélisation par éléments finis implique le découpage de la structure en sous-domaines appelés « éléments finis ». Les connexions de ces éléments ne se font pas sur toute la frontière commune, mais seulement en un certain nombre de points d'attache, appelés « nœuds » (ou nœuds de maillage »

Elements 1D :

- Barre
- Poutre
- Portique

Elements 2D :

- Elasticité plane
- Plaque mince
- Coque mince



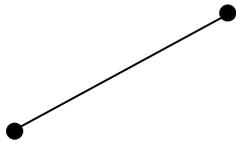
Elements 3D :

- Solid massif
- Plaque épaisse
- Coque épaisse

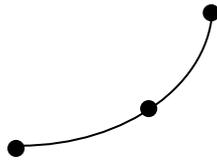
1.1.2. Types d'éléments :

Il existe de nombreux types d'éléments finis, à choisir en fonction de l'application, des ressources de calcul et de la qualité des résultats. Les figures suivantes illustrent les types d'éléments les plus utilisés. Le classement se fait en fonction de l'espace et du degré d'interpolation. L'espace d'interpolation correspond aux cas à une, deux ou trois dimensions. Le degré d'interpolation correspond au degré du polynôme utilisé pour la représentation du champ exact ; ce degré est directement lié au nombre de nœuds dans l'élément. Il peut être linéaire, quadratique, cubique, ... En général, les degrés élevés ne sont pas très courants à cause de la forte augmentation du nombre d'inconnues nodales.

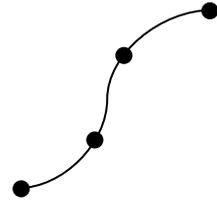
Éléments à une dimension :



Linéaire (2 nœuds)



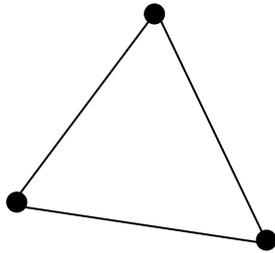
Quadratique (3 nœuds)



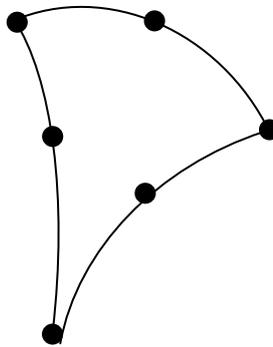
Cubique (4 nœuds)

Éléments deux dimension (éléments plans) :

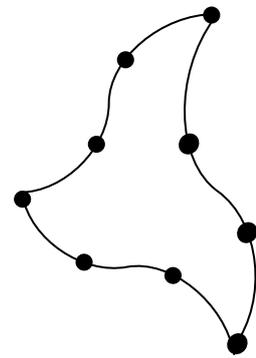
Éléments triangulaires



Linéaire (2 nœuds)

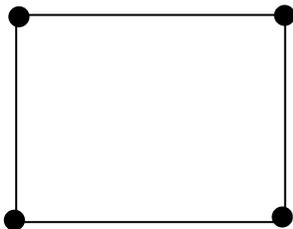


Quadratique (6 nœuds)

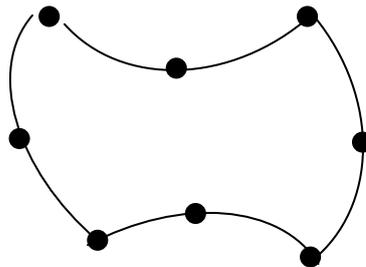


Cubique (9 nœuds)

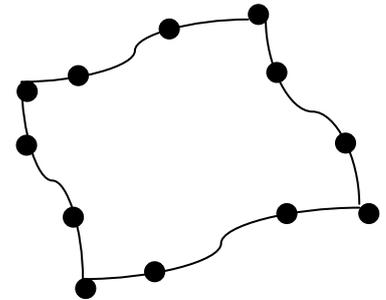
Éléments quadrangulaires



Linéaire (4 nœuds)



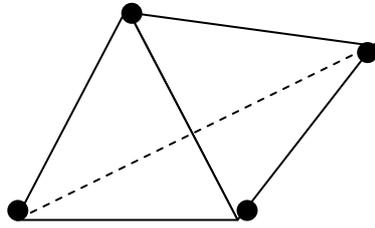
Quadratique (9 nœuds)



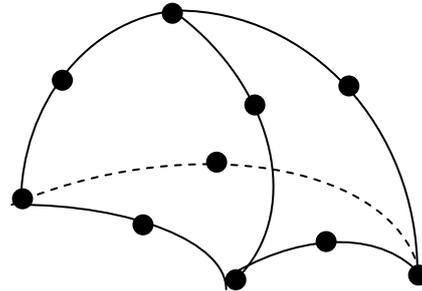
Cubique (12 nœuds)

Eléments trois dimension (éléments volumiques) :

Eléments tétraédriques :

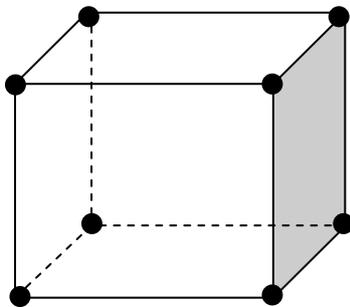


Linéaire (4 nœuds)

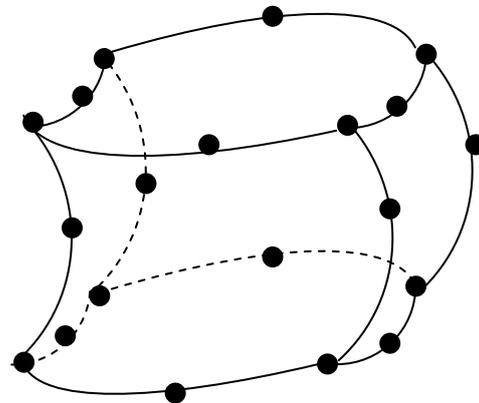


Quadratique (10 nœuds)

Eléments hexaédriques :



Linéaire (8 nœuds)



Quadratique (20 nœuds)

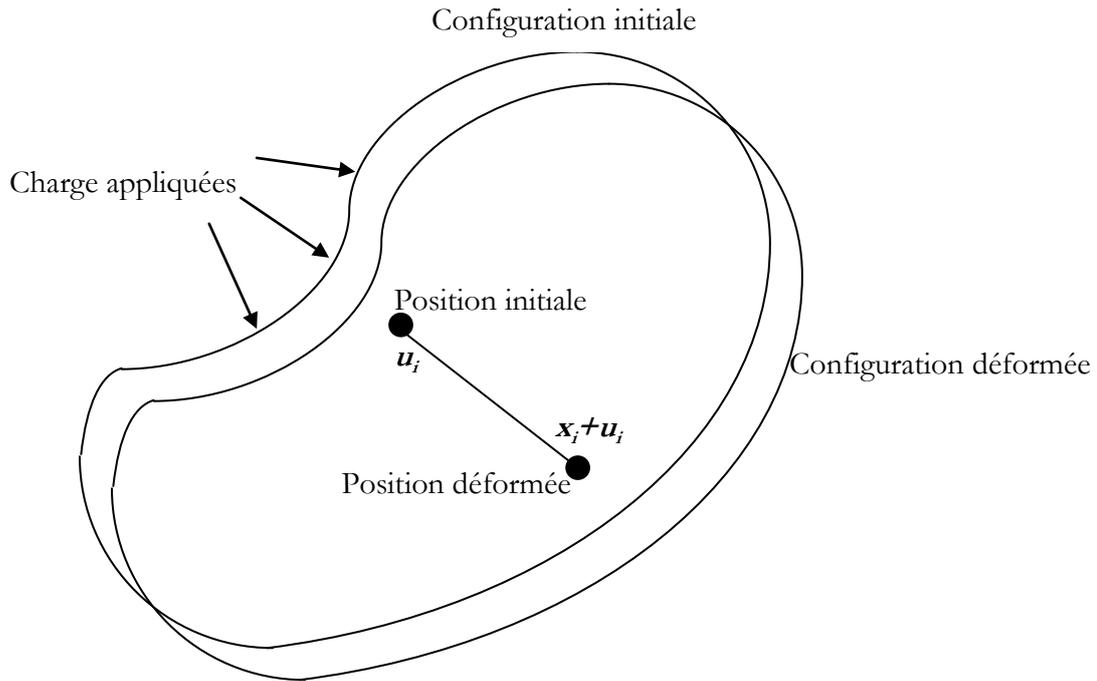
Formulation des éléments

Formulation des matrices élémentaire

Pour obtenir le système matriciel du comportement élémentaire, il faut tout d'abord définir les champs intervenant dans le comportement du milieu. On adopte ici une formulation en déplacement (ce qui est le plus utilisé dans la pratique).

Champ de déplacement

Lorsqu'un solide est soumis à des forces extérieures, il se déforme et chaque point matériel de coordonnées (x, y, z) se déplace en $(x+u, y+v, z+w)$ comme le schématisé la figure



Bien entendu, les déplacements relatifs des points voisins génèrent des déformations. Dans un élément, le champ de déplacement $u(x, y, z)$ est défini par l'interpolation des valeurs nodales u_i .

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(x, y, z) u_i$$

ou n_e est le nombre des nœuds dans l'élément, N_i sont les fonctions de forme et u_i sont les déplacements nodaux. Dans le cas tridimensionnel, cette expression s'écrit :

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_e} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

Où u_i , v_i et w_i sont respectivement les déplacements au nœud i selon x , y et z ; $\{u\}$ symbolise le vecteur des déplacements qui contient les différentes composantes. Les variables nodales sont regroupées dans un vecteur noté $\{q_e\}$.

$$\{q_e\}^t = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_n \ v_n \ w_n\}$$

La notation matricielle permet de définir le cas général :

$$\begin{matrix} \{u\} \\ (n_e \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [N] \\ (n_e \times n_{all}) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \{q_e\} \\ (n_{all} \times 1) \end{matrix}$$

Où $[N]$ est la matrice des fonctions de forme, n_e est le nombre de champs et n_{all} est le nombre de degré de liberté de l'élément

Déformations :

Dans le cas élastique linéaire, les déformations sont données par les dérivées des déplacements :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Ce qui peut être écrit sous la forme générale :

$$\{\mathbf{E}\} = [D] \cdot \{u\}$$

Où $\{\mathbf{E}\}$ est le vecteur des déformations, $\{u\}$ est le vecteur de champ de déplacements et $[D]$ est la matrice des opérateurs de dérivées partielles ; quelle que soit la nature du problème étudié, il est toujours possible de l'écrire sous cette forme.

En remplaçant $\{u\}$ par son expression en fonction des valeurs nodales on obtient :

$$\begin{matrix} \{\mathbf{E}\} & = & [D] & \cdot & [N] & \cdot & \{q_e\} \\ (n_e \times 1) & & (n_e \times n_c) & & (n_c \times n_{all}) & & (n_{all} \times 1) \end{matrix}$$

Où n_e est le nombre de déformations dans le problème étudié. Ainsi, la relation liant les déformations aux déplacements nodaux s'écrit :

$$\begin{matrix} \{\mathbf{E}\} & = & [B] & \cdot & \{q_e\} \\ (n_e \times 1) & & (n_e \times n_{all}) & & (n_{all} \times 1) \end{matrix}$$

Où $[B]$ est une matrice contenant les dérivées des fonctions de forme ; elle est donc indépendante de l'état de déplacement de l'élément.

Contraintes :

En élasticité linéaire isotrope, la loi de Hooke permet d'exprimer les contraintes en fonction des déformations, par l'intermédiaire de la matrice du comportement $[C]$ (généralement appelée matrice d'élasticité)

$$\begin{matrix} \{\sigma\} & = & [C] & \cdot & \{\mathbf{E}\} \\ (n_e \times 1) & & (n_e \times n_e) & & (n_e \times 1) \end{matrix}$$

La matrice $[C]$ est fonction du module d'élasticité E et du coefficient de Poisson ν . Ainsi, la contrainte peut être calculée directement en fonction des variables nodales :

$$\{\sigma\} = [C] \cdot [B] \cdot \{q_e\}$$

1. Matrices élémentaires :

$$[K_e] \cdot \{q_e\} = \{F_e\}$$

Où $[K_e]$ est la matrice de rigidité de l'élément, $\{q_e\}$ est le vecteur des déplacements nodaux (généralisées, car il peut aussi contenir d'autres grandeurs, telles que les rotations) et $\{F_e\}$ et le vecteur des forces nodales équivalentes : $\{F_e\} = \{F_e^v\} \{F_e^s\} \{F_e^o\}$.

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^t [C] [B] dV \quad : \text{matrice de rigidité de l'élément}$$

$$\{F_e^v\} = \int_{V_e} [N]^t \{f^v\} dV \quad : \text{vecteur des forces volumiques}$$

$$\{F_e^s\} = \int_{S_e} [N]^t \{f^s\} dS \quad : \text{vecteur des forces surfaciques}$$

$$\{F_e^o\} = \int_{V_e} [B]^t \{\sigma^o\} dV \quad : \text{vecteur des contraintes initiales}$$

2. Passage au repère de la structure :

Si les propriétés sont définies dans le repère local de l'élément, il est nécessaire de redéfinir les grandeurs matricielles de tous les éléments dans un repère unique, avant de faire l'assemblage. Ce passage du repère locale au repère global se fait par une rotation des axes. La matrice de passage $[T_e]$ est donnée par :

$$[T_e] = \begin{bmatrix} [\rho] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [\rho] \end{bmatrix}$$

Où $[\rho]$ est la matrice de rotation. Dans la matrice $[T_e]$, le nombre de répétition de la matrice $[\rho]$ est donnée par le nombre de nœuds dans l'élément. La relation entre les déplacements dans les deux repères est donnée par :

$$\{q_e\}_{local} = [T_e] \cdot [B] \cdot \{q_e\}_{global}$$

Dans le cas plan (2D), la matrice de rotation $[\rho]$ s'écrit :

$$\text{Pour les champs } (u, v) : [\rho] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

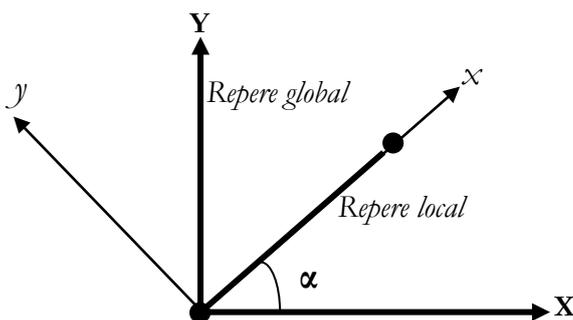
$$\text{Pour les champs } (u, v, \theta) : [\rho] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puisque la rotation θ n'est pas affectée par la rotation des axes.

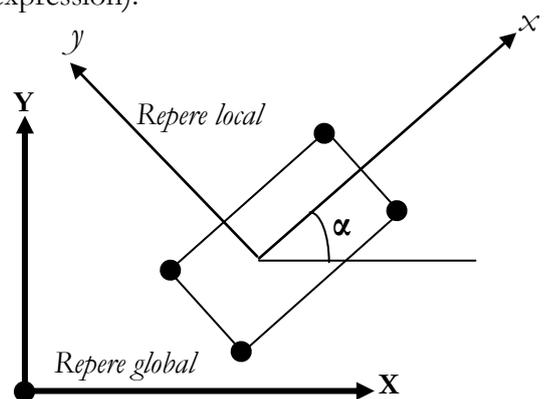
Dans le cas spatial (3D), la matrice de rotation $[\rho]$ s'écrit :

$$\text{Pour les champs } (u, v, w) : [\rho] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

Avec : l_i, m_i et n_i sont les trois cosinus directeurs de chacun des axes dans le repère global (en effet, le cas 2D n'est qu'une application particulière de cette expression).



Cas d'un élément linéaire



Cas d'un élément plan

3. Assemblage :

Dans la pratique, une structure est modélisée par un certain nombre d'éléments.

On définit un vecteur représentant les déplacements des nœuds de la structure $\{q\}$, le vecteur des déplacements des nœuds d'un élément $\{q_e\}$ est obtenu à l'aide d'une matrice de sélection $[S_e]$, un terme de cette matrice est soit « 0 », soit « 1 » (pour les degrés de liberté sélectionnés).

$$\{q_e\} = [S_e] \cdot \{q\}$$

Cette sélection donne le vecteur $\{q_e\}$ dans le repère de la structure (repère de $\{q\}$). Il faudra donc passer au repère de l'élément, en utilisant la matrice de passage $[T_e]$

$$\{q_e\}_{local} = [T_e] \cdot [S_e] \cdot \{q\}$$

Les quantités élémentaires dans le repère structural :

$$[K_e]_{global} = [T_e]^t [K_e]_{local} [T_e]$$

$$\{F_e^v\}_{global} = [T_e]^t \{F_e^v\}_{local}$$

$$\{F_e^s\}_{global} = [T_e]^t \{F_e^s\}_{local}$$

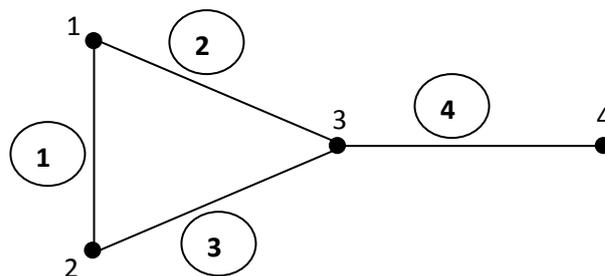
$$\{F_e^o\}_{global} = [T_e]^t \{F_e^o\}_{local}$$

Le système d'équilibre structural :

$$[K] \cdot \{q\} = \{F\}$$

Avec $[K]$ est la matrice de rigidité de la structure, $\{q\}$ est le vecteur des déplacements nodaux et $\{F\}$ est le vecteur des forces nodales.

Exemple d'assemblage des éléments :



Pour la structure illustrée sur la figure, assembler les matrices élémentaires $[K^{(e)}]$ dans la matrice globale $[K]$. Chaque matrice élémentaire $[K^{(e)}]$ est constituée de quatre sous-matrices $[K^{(e)}_{ij}]$ indiquant les termes liés à l'interdépendance des nœuds i et j .

$$\text{Element 1 (nœuds 1-2)} : [K^{(1)}] = \begin{bmatrix} [k_{11}^{(1)}] & [k_{12}^{(1)}] \\ [k_{21}^{(1)}] & [k_{22}^{(1)}] \end{bmatrix}$$

$$\text{Element 2 (nœuds 1-3)} : [K^{(2)}] = \begin{bmatrix} [k_{11}^{(2)}] & [k_{13}^{(2)}] \\ [k_{31}^{(2)}] & [k_{33}^{(2)}] \end{bmatrix}$$

$$\text{Element 3 (nœuds 2-3)} : [K^{(3)}] = \begin{bmatrix} [k_{22}^{(3)}] & [k_{23}^{(3)}] \\ [k_{32}^{(3)}] & [k_{33}^{(3)}] \end{bmatrix}$$

$$\text{Element 4 (nœuds 3-4)} : [K^{(4)}] = \begin{bmatrix} [k_{33}^{(4)}] & [k_{34}^{(4)}] \\ [k_{43}^{(4)}] & [k_{44}^{(4)}] \end{bmatrix}$$

La structure contient quatre éléments et quatre nœuds :

$$[K] = \begin{bmatrix} [k_{11}^{(1)}] + [k_{11}^{(2)}] & [k_{12}^{(1)}] & [k_{13}^{(2)}] & [0] \\ [k_{21}^{(1)}] & [k_{22}^{(1)}] + [k_{22}^{(3)}] & [k_{23}^{(3)}] & [0] \\ [k_{31}^{(2)}] & [k_{32}^{(3)}] & [k_{33}^{(2)}] + [k_{33}^{(3)}] & [0] \\ [0] & [0] & [k_{43}^{(4)}] & [k_{44}^{(4)}] \end{bmatrix}$$

5. Conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont indispensables pour rendre la matrice de rigidité inversible. En général, des conditions sont imposées sur certains déplacements de la structure. Les valeurs imposées peuvent être nulles, fixées ou relatives à d'autres points structuraux.

Dans le cas déplacement nul $u_i=0$, il suffit de remplacer la ligne et la colonne i par « 0 » sauf sur la diagonale, on met « 1 ». Le second membre est également remplacé par zéro. Cette opération remplace l'équation du terme u_i par l'équation : $u_i=0$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

Dans la matrice assemblée dans l'exemple précédent, introduire des conditions de blocage au nœud 2 (tous les degrés de liberté de ce nœud sont bloqués).

$$[K] = \begin{bmatrix} [k_{11}^{(1)}] + [k_{11}^{(2)}] & [0] & [k_{13}^{(2)}] & [0] \\ [0] & [I] & [0] & [0] \\ [k_{31}^{(2)}] & [0] & [k_{33}^{(2)}] + [k_{33}^{(3)}] & [0] \\ [0] & [0] & [k_{43}^{(4)}] & [k_{44}^{(4)}] \end{bmatrix}$$

6. Résolution :

Pour résoudre le système matriciel, il existe plusieurs méthodes, deux familles sont bien connues :

Méthodes dites « exactes » :

- Gauss
- Cholesky
- Méthode directe (inversion de la matrice de rigidité)

Méthodes dites « approchées » (ou itératives) :

- Gauss-Seidel
- Relaxation
- Newton-Raphson
- Gradient conjugué

7. Algorithme de calcul par éléments finis :

L'algorithme de calcul par éléments finis se décompose en trois phases :

1. Pré-processeur : c'est la phase de la définition du modèle, du calcul des matrices et vecteurs élémentaires, de l'assemblage et de l'introduction des conditions aux limites.

2. Solveur : il s'agit de la résolution numérique du système matriciel pour obtenir les déplacements nodaux. C'est la phase qui prend le plus de temps CPU.

3. Post- processeur : c'est la phase de calcul des efforts, des déformations et de traitement graphique.