Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Généralités sur les espaces vectoriels

1.1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 1.1: Espace vectoriel

Soient $(\mathbb{K}, \boxplus, \boxtimes)$ *un corps et* E *un ensemble muni d'une loi interne* $+$ *et d'une loi externe* $\cdot$ *i.e d'une application :*

$$\begin{cases} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x. \end{cases}$$

Le triplet $(E, +, \cdot)$ *est dit* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel ou un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *s'il vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $(E, +)$ *est un groupe commutatif ;*
(ii) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda \boxplus \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall(x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
(iv) $\forall x \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$;
(v) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda \boxtimes \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

Remarques :

1. Les éléments de E sont appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.
2. L'élément neutre du groupe $(E, +)$ est noté 0_E ou 0 et appelé le vecteur nul de E.

Théorème 1.1: Règles de calcul

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

1. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E).$$

2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x).$$

3. $\forall x \in E - \{0\}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda \cdot x = \mu \cdot x \Longrightarrow \lambda = \mu.$$

4. $\forall x \in E, \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cdot x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) \cdot x.$$

5. $\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda \cdot x_k = \lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right).$$

Exemples :

1. Tout sous-corps $\mathbb{L}$ d'un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Soient $\mathbb{K}$ un corps et n un entier positif. $\mathbb{K}^n$ muni par la loi interne :
$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) & \longmapsto & (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \end{array}$$
et la loi externe :
$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & (\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) & \longmapsto & (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \end{array}$$
est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
3. Soient $P = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. Posons
$$P + Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n,$$
et
$$\lambda \cdot P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n X^n,$$
alors $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
4. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et A un ensemble quelconque. Notons $\mathbb{K}^A$ ou $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ l'ensemble de toute les applications $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$. Pour $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ posons :
$$\begin{array}{rccc} f + g : & A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x), \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rccc} \lambda \cdot f : & A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{array}$$
Le triplet $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
5. Soit $\mathbb{K}$ un corps. On désigne par $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour la loi interne :
$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ & ((u_n), (v_n)) & \longmapsto & (u_n + v_n) \end{array}$$
et la loi externe :
$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ & (\lambda, (u_n)) & \longmapsto & (\lambda u_n). \end{array}$$

1.1.2 Combinaisons linéaires

Définition 1.2: Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une famille de n vecteurs de E. On appelle combinaisons linéaire de la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tout vecteur de la forme $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, $(-5,2)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(-1,3)$ et $(2,7)$. En effet, on a
$$(-5,2) = 3(-1,3) - (2,7).$$
2. Le vecteur $3-X-4X^2$ est une combinaison linéaire des vecteurs $1+X^2$ et $10-2X-4X^2$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, car
$$3 - X - 4X^2 = -2(1+X^2) + \frac{1}{2}(10 - 2X - 4X^2).$$
3. Pour $q \in \mathbb{R}$, notons u_q la suite de terme général q^n. Alors $\{u_q\}_{q\in\mathbb{R}}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite u de terme général $1 + 3^{n-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une combinaison linéaire de la famille $\{u_1, u_3, u_{\frac{-1}{2}}\}$ car $u = u_1 + \frac{1}{9}u_3 + 2u_{\frac{-1}{2}}$.

Remarque :

Si un vecteur x est combinaison linéaire des x_i, il n'y a pas forcément unicité des scalaires λ_i.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, on a
$$(3,3) = (1,1) + 2(0,1) + 2(1,0) = 2(1,1) + (0,1) + (1,0).$$

1.2 Sous-espaces vectoriels

1.2.1 Définition et propriétés

Définition 1.3: Sous-espace vectoriel

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. F est dit un sous-espace vectoriel de E si
- ***(i)*** *F est un sous-groupe de $(E,+)$;*
- ***(ii)*** *F est stable par multiplication par un scalaire i.e $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \lambda \cdot x \in F$.*

Dans la pratique, on utilise la caractérisation suivante pour montrer qu'une partie non vide F est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 1.2: Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
1. *$0_E \in F$;*
2. *$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda x + y \in F$.*

Exemples :

1. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E.
2. E est lui même un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus grand sous-espace vectoriel de E.
3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit
$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}.$$
Le fait que $2\times 0+0-0 = 0$ implique $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$. Pour $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$$
et
$$2(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) = \lambda(2x_1 + y_1 - z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$$
donc $\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in F$. D'où F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. $\mathbb{K}_n[X] := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, car $\deg 0 = -\infty \leq n$ et pour tous $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a
$$\deg(\lambda P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\} \leq n.$$
5. L'ensemble $F = \left\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0\right\}$ est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, c'est clair que $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in F$ et pour tous $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\frac{d^2(\lambda f + g)}{dx^2} + (\lambda f + g) = \lambda\left(\frac{d^2 f}{dx^2} + f\right) + \frac{d^2 g}{dx^2} + g = 0.$$
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - x + y^3 = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car n'est pas stable par multiplication par un scalaire, en effet $(1, 0) \in F$ mais $(2, 0) \notin F$.

Théorème 1.3: Stabilité par combinaison linéaire

Soient F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\{f_i\}_{i\in I} \in F^I$. Alors toute combinaison linéaire de $\{f_i\}_{i\in I}$ appartient à F.

1.2.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Théorème 1.4: Intersection de sous-espaces vectoriels - réunion de sous-espaces vectoriels

1. *L'intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*
2. *La réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.*

Exemples :

1. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$:
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - t = 0 \text{ et } x + z - t = 0\}.$$
On a
$$F = F_1 \cap F_2$$
où
$$F_1 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - t = 0\} \text{ et } F_2 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z - t = 0\}.$$
Puisque F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit
$$G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0 \text{ ou } P(1) = 0\}.$$
On a
$$G = G_1 \cup G_2$$
où
$$G_1 := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\} \text{ et } G_2 := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}.$$
On a $X \in G_1$ et $X - 1 \in G_2$, mais $X \notin G_2$ et $X - 1 \notin G_1$, donc $G_1 \not\subset G_2$ et $G_2 \not\subset G_1$. Alors, G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

Définition 1.4: Somme de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G, notée $F + G$, l'ensemble
$$F + G := \{u + v \mid u \in F \text{ et } v \in G\}.$$

Remarques :

Si F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E, on a alors
1. $F+G = G+F$, $F+(G+H) = (F+G)+H$, $F+\{0_E\} = F$, $F+E = F$, $F+F = F$.
2. Si $H = F + G$, l'écriture $F = H - G$ n'a pas de sens.
3. Si $F + G = F + H$, on ne conclut pas hâtivement que $G = H$.

Théorème 1.5

La somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus $F + G$ contient F et G et est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant F et G.

Remarques :

$F + G$ se comprend aussi comme étant le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant l'ensemble $F \cup G$.

On peut généraliser la proposition précédente à la somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Théorème 1.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $F_1, \ldots, F_n$ n sous espaces vectoriels de E. Alors, la somme

$$F_1 + \cdots + F_n = \{u_1 + \cdots + u_n \ : \ (u_1, \cdots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_n$.

Remarques :

$F_1 + \cdots + F_n$ se comprend aussi comme étant le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant l'ensemble $\cup_{i=1}^{n} F_i$.

Définition 1.5: Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si l'une des assertions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. *pour tout $w \in F + G$, il existe un unique couple de vecteurs $(u, v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$;*
2. *$F \cap G = \{0_E\}$.*

Dans ce cas, la somme $F + G$ se note $F \oplus G$.

Exemple :

Les sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 2z\}$$

sont en somme directe, puisque si $(a, a, a) \in G$, alors $a = a - 2a$, d'où $a = 0$, par suite $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Définition 1.6: Sous-espace vectoriels supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F est supplémentaire à G dans E si et seulement si

$$E = F + G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

Exemple :

Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les deux espaces vectoriels :

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ paire}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ impaire}\}.$$

On a $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$. En effet, pour toute $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{h(x)}.$$

Puisque $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$, alors $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$. De plus, si $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x) = -f(x),$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0,$$

d'où $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$.

Théorème 1.7: Existence des espaces vectoriels supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Tout sous-espace vectoriel de E admet au mois un sous-espace vectoriel supplémentaire.

1.2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition 1.7: Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par A l'intersection des sous-espaces vectoriels contenant A. C'est le plus petit sous-espace vectoriel (pour l'inclusion) contenant A. On le note $\mathrm{Vect}(A)$.

Exemples :

1. $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$, car l'espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Vect}(E) = E$, car $\mathrm{Vect}(E)$ est un sous-espace vectoriel contenant E et E est le plus grand sous-espace vectoriel de E.

Théorème 1.8

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $\mathrm{Vect}(A)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(a)_{a\in A}$.*

Définition 1.8: Sous-espace vectoriel engendré par une famille

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ le sous-espace vectoriel engendré par la partie $\{x_i, i \in I\}$. Dans ce cas, on note ce sous-espace vectoriel par $\mathrm{Vect}(\{x_i, i \in I\})$. *Cet ensemble est alors l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i\in I}$.*

Exemples :

1. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $A := \{(-2,0,1),(3,1,1)\}$ est
$$\mathrm{Vect}(A) = \{a(-2,0,1) + b(3,1,1) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{(-2a+3b, b, a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$
2. Dans $\mathbb{C}_2[X]$, soient les vecteurs $u = iX - X^2$ et $v = 1 + i + X$. Alors
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Vect}(u,v) & = & \{\lambda(iX - X^2) + \mu(1+i+X) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{C}\} \\ & = & \{\mu(1+i) + (i\lambda+\mu)X - \mu X^2 \mid \lambda,\mu \in \mathbb{C}\}. \end{array}$$

Théorème 1.9

1. *Si un vecteur w est combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ alors*

$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n, w) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n).$$

2. *Si un vecteur w est combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n)$ alors*

$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_k + w, v_{k+1}, \dots, v_n) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n).$$

Exemples :

1. Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (-2, 1, 0), \quad v_2 = (3, 0, -1) \quad \text{et} \quad w = (-8, 1, -2).$$

Le fait que $w = v_1 - 2v_2$ donne

$$\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, w\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}.$$

2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{Vect}\{1, \cos^2, \sin^2\} = \mathrm{Vect}\{1, \cos^2\}.$$

Théorème 1.10

Soient A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors

$$A \subset B \Longrightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$$

et

$$\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B).$$

1.3 Partie génératrice, Partie libre et Base

1.3.1 Partie génératrice- Famille génératrice

Définition 1.9: Partie génératrice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X une partie de E. On dit que la partie X est génératrice de E ou engendre E si tout élément de E est combinaison linéaire de X, i. e $E = \mathrm{Vect}\{X\}$. Si $X = \{x_i \mid i \in I\}$, on dit aussi que la famille $\{x_i\}_{i \in I}$ est génératrice de E ou engendre E.

Exemples :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ suivant
$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n(0, 0, \dots, 1).$$
Alors $\mathbb{K}^n = \text{Vect}(e_i, 1 \leq i \leq n)$. En effet, tout vecteur $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ peut s'écrire sous la forme
$$v = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$
2. Dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $\{1, i\}$ est génératrice.
3. La famille $\{X^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{1, X, \dots, X^n\}$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.
4. L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $\{(-3, 1, 0), (2, 0, 1)\}$. En effet on a
$$\begin{array}{rcl} E & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -3y + 2z\} \\ & = & \{(-3y + 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y(-3, 1, 0) + z(2, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$
5. L'ensemble $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par la famille $\{1 - X, 1 - X^2\}$. En effet, si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in G$, alors $a_0 + a_1 + a_2 = 0$, d'où
$$P = -a_1 - a_2 + a_1 X + a_2 X^2 = -a_1(1 - X) - a_2(1 - X^2).$$
6. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, considérons le sous-espace vectoriel
$$H = \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n\}.$$
Puisque
$$H = \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times 3^n\},$$
alors, la suite $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendre H.
7. Soit dans $\mathbb{C}$ le sous-espace vectoriel
$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) = \text{Im}(z)\}.$$
On a
$$K = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x = y\} = \{x(1 + i) \mid x \in \mathbb{R}\},$$
donc $\{1 + i\}$ engendre K.

Remarque :

La partie génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel n'est pas unique.

1.3.2 Familles libres, familles liées

Définition 1.10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre ou linéairement indépendante dans E si

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad (\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}).$$

On dit que la famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est liée si elle n'est pas libre, ce qui signifie

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \text{ tels que } (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \text{ et } \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E.$$

Exemples :

1. Une famille à un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
2. La famille $\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n(0, 0, \ldots, 1)\}$ de $\mathbb{K}^n$ est libre.
3. La famille $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.
4. La famille $\{\sin, \cos\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$\alpha \sin + \beta \cos = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})},$$
alors
$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \alpha \sin x + \beta \cos x = 0.$$
En particulier $\alpha \sin 0 + \beta \cos 0 = 0$ et $\alpha \sin \frac{\pi}{2} + \beta \cos \frac{\pi}{2} = 0$, d'où $\alpha = \beta = 0$.
5. La famille $\{(-2, 1), (-3, 3), (1, 1)\}$ est liée dans $\mathbb{R}^2$, car $(-3, 3) - 2(-2, 1) - (1, 1) = (0, 0)$.

Théorème 1.11

Soit $n \geq 2$. La famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ est combinaison linéaire des autres.

1.3.3 Base

Définition 1.11: Base

On appelle base toute famille de vecteurs à la fois génératrice et libre.

Exemples :

1. $\{1, i\}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. $\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n(0, 0, \ldots, 1)\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Cette base est appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
3. La famille $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
4. La famille $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Remarques :

1. La famille vide est une base de l'espace vectoriel nul.
2. Il n'y a pas unicité de la base pour un espace vectoriel donné.

Exemples :

1. Les familles $\{(2,0,2),(1,3,-5),(1,-1,0)\}$, $\{(-1,1,0),(1,4,2),(1,-2,7)\}$ et $\{(-3,2,5),(1,1,1),(3,1,-1)\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$
2. Les familles $\{-1, 1+X, (1+X)^2\}$ et $\{2, -1+2X, X-X^2\}$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 1.12: Propriété fondamentale

Soit $B=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Tout élément v de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i :

$$v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i \quad \text{où } \lambda_i\in\mathbb{K}.$$

Les scalaires λ_i s'appellent coordonnées de v dans la base B.

Exemples :

1. Les coordonnées du couple $(-2,1)$ de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\{(1,1),(5,-1)\}$ est $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, car
$$(-2,1)=\frac{1}{2}(1,1)-\frac{1}{2}(5,-1).$$
2. Les coordonnées du polynôme $2-X^2+X^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ sont $(2,0,-1,1)$. Considérons maintenant la nouvelle base de $\mathbb{R}_3[X]$:
$$\{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}.$$
Le fait que
$$2-X^2+X^3=2\times 1+(1+X)-2\times(1+X+X^2)+(1+X+X^2+X^3),$$
implique que les coordonnées de $2-X^2+X^3$ dans la nouvelle base sont $(2,1,-2,1)$.

Théorème 1.13: Base d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soient F et G deux sous-espace vectoriels de E non réduit à $\{0_E\}$. Si B_F est une base de F et B_G est une base de G, alors $B_F\cup B_G$ est une famille génératrice de $F+G$. De plus, si F et G sont en somme directe, alors $B_F\cup B_G$ est une base de $F\oplus G$.

Exemples :

1. Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \text{Vect}\{(1,-1,0,2)\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}\{(-2,5,3,1),(1,1,-2,-2)\}.$$

Puisque $(1,-1,0,2) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ et les vecteurs $(-2,5,3,1),(1,1,-2,-2)$ ne sont pas colinéaire, alors $\{(1,-1,0,2)\}$ et $\{(-2,5,3,1),(1,1,-2,-2)\}$ sont respectivement une base de F et de G. Donc $\{(1,-1,0,2),(-2,5,3,1),(1,1,-2,-2)\}$ est une famille génératrice de $F+G$.

2. Puisque les sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$F = \text{Vect}\{1\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}\{X^2\}.$$

sont en somme directe, alors $\{1, X^2\}$ est une base $F+G$.

1.4 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 1.12: Espace vectoriels de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il possède une partie génératrice finie, et de dimension infinie sinon.

Exemples :

1. Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont de dimension fine.

2. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Théorème 1.14: Existence du base

Tout espace vectoriel différent de $\{0_E\}$ et fini admet une base.

Théorème 1.15: Formule de Grassmann

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En particulier, F et G en somme directe si et seulement si

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Théorème 1.16

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et on a

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus, on a

$$\dim(F) = \dim(E) \Longleftrightarrow F = E.$$

Exemple :

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont le sous-espace nul, les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1.17: Dimension

Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre s'appelle la dimension de E et est noté $\dim(E)$.

Remarque :

La dimension de l'espace nul est 0.

Exemples :

1. $\dim \mathbb{K}^n = n$.
2. $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.
3. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.
4. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Théorème 1.18

Dans un espace vectoriel de dimension n :

1. *toute famille libre a au plus n éléments,*
2. *toute famille libre de n élément est une base,*
3. *toute famille génératrice a au moins n élément,*
4. *toute famille génératrice de n élément est une base.*

Exemples :

1. La famille $\{(0,-1,3),(-1,3,0),(3,0,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, car elle est libre et $\mathrm{Card}\{(0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
2. La famille $\{1, 1+X, (1+X)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, car elle est libre et $\mathrm{Card}\{1, 1+X, (1+X)^2\} = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 1.19: Caractérisation de la supplémentarité

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si au moins deux des trois assertions suivantes sont vraies :

(i) $\dim F + \dim G = \dim E$.
(ii) $F \cap G = \{0_E\}$.
(iii) $F + G = E$.