إسم و لقب الطالب

المحور الأول

المعادلات التفاضلية

المحاضرة : 01

أ- المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

ملاحظة:

حفاظا على السير الحسن لحصة الأعمال الموجهة ، و قصد الإستفادة من وقتها الممنوح و زيادة الإستيعاب ، فإنه يتوجب على كل طالب إحترام خصوصية المادة و بصرامة ، و ذالك بالإلتزام بما يلي:

1- إحظار مطبوعة الدرس الخاص بالسلسلة مكتوب عليها إسم و لقب الطالب أو الدرس مكتوب باليد
2- إحظار مطبوعة السلسلة مكتوب عليها إسم و لقب الطالب أو السلسلة مكتوبة باليد
3- تدوين الحلول المكتوبة على الصبورة من طرف الطالب إجباري و يتولى الأستاذ التحقق من ذالك
4- يمنع إستخراج مطبوعة حلول السلسلة إلا بإذن من الأستاذ
5- يمنع إستعمال الهاتف للأغراض السابقة
6- على أستاذ الأعمال الموجهة طرد كل طالب لا يلتزم بإحدى التعليمات السابقة

أ.1- تعاريف

1_ نسمي **معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى** كل عبارة تربط بين دالة y و مشتقتها الأولى y' و المتغير x

مثال: إذا أخذنا الدالة $y(x) = e^{x}$ ، فإن $y'(x) = y(x)$ و نكتب إختصارا $y' = y$ و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى

إذا أخذنا الدالة $y(x) = e^{x^3}$ ، فإن $y'(x) = 3x^2e^{x^3}$ إذن $y' = 3x^2y$ و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى

2_ لتكن E معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى أي

$$y' = h(x, y) \quad \ldots.(E)$$

حيث h هي الدالة التي توضح العلاقة بين الدالة y و مشتقتها الأولى y' و المتغير x

نسمي **حلا للمعادلة التفاضلية** (E) كل دالة تحقق عبارتها المعادلة (E)

مثال: إذا كانت E هي المعادلة التفاضلية $y' = \frac{3x^2}{2y}$ ، فإنه من بين حلول هذه المعادلة ، الدالة المعطاة كما يلي

$$y(x) = \sqrt{x^3 + 2}$$

3_ نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى أنها **قابلة للفصل** (أو ذات **متغيرين منفصلين**) إذا أمكن كتابتها على الشكل

$$y'g(y) = f(x) \ldots\ldots(E)$$

أي إذا أمكن و ضع y' و العبارة المتعلقة بـ y في طرف واحد ، و في الطرف الآخر العبارة المتعلقة بـ x فقط

بما أن y' هي مشتقة y بالنسبة للمتغير x فإننا نعبر عن هذا رياضيا بـ $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}}$ و بالتعويض في (E)...نحصل

$\frac{dy}{dx}g(y) = f(x)$ إذن $g(y)dy = f(x)dx$ و منه $\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$

مثال : أوجد حلولا للمعادلة التفاضلية

1/ $y'x^2 - \sqrt{x}y = 0......(E_1)$,

نلاحظ أن الدالة الصفرية أي $\left(y(x) = 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\right)$ هو حل للمعادلة (E_1)

لما $y(x) \neq 0$ فإن (E_1) هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى قابلة للفصل

$$(E_1) \Rightarrow y'x^2 - \sqrt{x}y = 0$$
$$\Rightarrow y'x^2 = \sqrt{x}y$$
$$\Rightarrow y'\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{x}}{x^2} \quad ; \quad \left(y' = \frac{dy}{dx} \quad , \ \frac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{-\frac{3}{2}}\right)$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int x^{-\frac{3}{2}}dx$$
$$\Rightarrow Ln|y| = \frac{-2}{\sqrt{x}} + C_1 \quad ; \quad C_1 \in \mathbb{R} \quad , \qquad (\text{بفرض } x > 0)$$
$$\Rightarrow |y| = \mathrm{C}_2 e^{\frac{-2}{\sqrt{x}}} \quad ; \quad \mathrm{C}_2 = \pm e^{C_1} \quad ,$$
$$\Rightarrow y(x) = \mathrm{C}e^{\frac{-2}{\sqrt{x}}} \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

2-أ المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

1_ تعريف

نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى أنها **خطية** إذا أمكن كتابتها على الشكل

$$\boldsymbol{y' + a(x)y = f(x) \dots\dots (E)}$$

حيث a و f هما دالتين مستمرتين على مجال ما I من $\mathbb{R}$

- إذا كانت $\boldsymbol{f(x) = 0}$ ، (E) تصبح المعادلة $\boldsymbol{y' + a(x)y = 0}$ و نسميها عندئذ **بالمتجانسة** أو بدون طرف ثاني
- إذا كانت $\boldsymbol{f(x) \neq 0}$ ، (E) نسميها عندئذ معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى **بطرف ثاني**

مثال:

$y' + \frac{e^x}{x^2-1}\ y = 0$ هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى متجانسة

$y' + \frac{e^x}{x^2-1}\ y = \sqrt[3]{\mathrm{x}}$ هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى بطرف ثاني

2_ حل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

أ) ***حل المعادلة المتجانسة*** (بدون طرف ثاني)

$$\boldsymbol{y' + a(x)y = 0} \ \dots\dots (\boldsymbol{E_0})$$

- نلاحظ أن الصفر $(y = 0)$ هو حل للمعادلة (E_0)
- إذا كان $y \neq 0$ فإن :

$$(E_0) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a(x) \qquad ; \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -a(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int a(x)dx$$

$$\Leftrightarrow Ln|y| = -\int a(x)\,dx \; + C_1 \; ; \; C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y(x) = Ce^{-\int a(x)dx}} \quad ; \; C \in \mathbb{R} \qquad ,(C = \pm e^{C_1})$$

إذا كانت $\boldsymbol{A(x)}$ **هي الدالة الأصلية لـ** $\boldsymbol{a(x)}$ فإن

$$\boldsymbol{y(x) = Ce^{-A(x)}} \quad ; \; C \in \mathbb{R}$$

هي **حلول** المعادلة المتجانسة (E_0)

- مثال:

أوجد الحلول الغير معدومة للمعادلة التفاضلية

$$\sqrt{x^2+1}\,y' + xy = 0 \ldots \ldots (E_0)$$

$$(E_0) \Leftrightarrow y' + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}y = 0$$

إذن (E_0) هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى متجانسة

$$(E_0) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad ; \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

نحسب التكامل الموجود في الطرف الثاني

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \quad = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx \quad = \sqrt{x^2+1} + C_1 \quad ; \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

و منه

$$(E_0) \quad \Leftrightarrow Ln|y| = -\sqrt{x^2+1} + C_1 \quad ; \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = Ce^{-\sqrt{x^2+1}} \quad ; \; C \in \mathbb{R}$$

$$\left(\boldsymbol{a(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \; ; \; \boldsymbol{A(x)} = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \quad = \sqrt{x^2+1}\right)$$

ملاحظة : أثناء حل التمارين أو في الإمتحان يجب إتباع خطوات الحل بدلا من توظيف العبارة الأخيرة

ب) حل المعادلة بطرف ثاني

$$\boldsymbol{f(x) \neq 0} \text{ مع } \quad \boldsymbol{y' + a(x)y = f(x) \ldots\ldots(E)}$$

نقوم أولا بحل المعادلة المتجانسة المرافقة لها

$$y' + a(x)y = 0 \ldots\ldots(E_0)$$

فنحصل على حلول المعادلة المتجانسة على الشكل

$$y(x) = Ce^{-\int a(x)dx} \quad ; \; C \in \mathbb{R}$$

إذا كانت $\boldsymbol{A(x)}$ هي الدالة الأصلية لـ $\boldsymbol{a(x)}$ فإن هذه الحلول تكتب على الشكل

$$y(x) = Ce^{-A(x)} \quad ; \; C \in \mathbb{R}$$

لإيجاد حلول المعادلة بطرف ثاني (E) نستعمل **طريقة تغيير الثابت:**

أي نضع $\boldsymbol{C = C(x)}$ و نبحث عن عبارته بدلالة x بإستعمال المعادلة (E)

لدينا:

$$\begin{cases} y = C(t)e^{-A(x)} \\ y' = C'(x)e^{-A(x)} - a(x)C(x)e^{-A(x)} \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة (E) نحصل على

$$C'(t)e^{-A(x)} - a(x)C(t)e^{-A(x)} + a(x)C(t)e^{-A(x)} = f(x)$$

إذن :

$$C'(t)e^{-A(x)} = f(x)$$

و

$$C'(t) = f(x)e^{A(x)}$$

و منه

$$C(t) = \int f(x)e^{A(x)}\,dx$$

و في الأخير تكون حلول المعادلة بطرف ثاني هي

$$\left[\int f(x)e^{A(x)}\,dx\right]e^{A(x)}$$

حيث $A(x)$ هي الدالة الأصلية لـ $a(x)$

- مثال أوجد حلول المعادلة التفاضلية

$$y' + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}y = xe^{-x\sqrt{x^2+1}} \quad \ldots\ldots(E)$$

i) نحل أولا المعادلة التفاضلية المتجانسة المرافقة لها

$$y' + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}y = 0 \ldots\ldots(E_0)$$

حسب ما سبق إذا كانت $A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1} + C_1 \quad ; \quad C_1 \in \mathbb{R}$

فإن حلول المعادلة المتجانسة (E_0) هي

$$y = Ce^{-A(x)} = Ce^{-\sqrt{x^2+1}}$$

ii) نستعمل طريقة تغيير الثابت لإيجاد حلول المعادلة التفاضلية بطرف ثاني(E)

نضع $C = C(x)$ فنحصل على

$$\begin{cases} y = C(x)e^{-\sqrt{x^2+1}} \\ y' = C'(x)e^{-\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}C(x)e^{-\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

بالتعويض في (E) نحصل على

$$\Leftrightarrow C'(x)e^{-\sqrt{x^2+1}} = xe^{-x\sqrt{x^2+1}}$$
$$\Leftrightarrow C'(x) = xe^{x}$$
$$\Leftrightarrow C(x) = \int xe^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + C_1 \quad ; \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

و منه $y = (xe^{x} - e^{x} + c)e^{-\sqrt{x^2+1}}$ هي حلول المعادلة بطرف ثاني (E)