Centre universitaire Abdalhafid Boussouf-Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques Matière : *Analyse 03*

TD N^0:05 (Intégrales généralisées)

Exercice1 : En revenant à la définition, étudier si les intégrales impropres suivantes ont un sens ou non et donner leur éventuelle valeur

$$1.\ I_n = \int_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx,\ n \in \mathbb{N}, \qquad 2.\ J_n = \int_0^1 \ln^n x dx,\ n \in \mathbb{N},$$

$$3.\ I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}.$$

Exercice2 : Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes

$$1.\ I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta}dx, \quad 2.\ I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x\sin x)}{\left|x\ln x\right|^\delta}dx, \quad 3.\ I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan(x^2)}{x^3\left|\ln x\right|}dx,$$

$$4.\ I_4 = \int_1^2 \frac{\left|x-1\right|^\alpha}{\left|\ln x\right|^\beta}dx\ , \quad 5.\ I_5 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

Exercice3 : Etudier la convergence absolue et la semi-convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$1.\ I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\theta}dx,\ \theta \in \mathbb{R}_+^* \qquad 2.\ I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}+\cos x}dx\ .$$

Exercice 4 : Soit α un réel positif donné.

1. Montrer que L'intégrale généralisée :

$$F(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}dx,$$

est absolument convergente.

2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = 0$.

Exercice 5(Supplémentaire) : Soient P et Q deux polynômes tels que $\deg(P) < \deg(Q)$. Etudier la convergence de l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x)dx, \; Q \text{ ne s'annule pas sur } \; [a, +\infty[.$$