Centre universitaire Abdalhafid Boussouf-Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques. Matière *: Analyse 03*

TD N^0:4 (Séries de Fourier)

Exercice n°1 **I.** Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ deux séries absolument convergentes de réels.

1) Montrer que la série de fonctions $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Soit $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ et $s_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$.

2) Que peut-on dire de la fonction f ?.

3) Calculer $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dt$, $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(px)dx$ et $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(px)dx$, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

4) Montrer que la suite de fonction $(s_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f^2.

5) Calculer $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)dx$ et en déduire la formule (dite de Parseval) :

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

II. Application : On considère la fonction 2π-périodique f définie par :

$$f(x)=\frac{x^2}{2},\quad \text{pour } x\in[-\pi,\pi].$$

1. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Montrer que f est développable en série de Fourier et calculer leur coefficients.
3. En déduire les sommes des séries numériques $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, en choisissant des valeurs particulières de x.
4. Calculer en appliquant la formule de Parseval la somme de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^4}$.

Exercice n°2 : On considère la fonction 2π-périodique f définie par :

$$f(x)=x,\qquad \text{pour } x\in\,]-\pi,\pi[\,.$$

1) Tracer le graphe de la fonction f.

2) Montrer que f est développable en série de Fourier et calculer leurs coefficients.

3) En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, en choisissant une valeur particulière de x.

4) Calculer en appliquant la formule de Parseval la somme $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.