

ANALYSE NUMÉRIQUE

Prof. HAMRI Nasr-eddine
Département de Mathématiques
Université Abdelhafid Boussouf - Mila



TABLE DES MATIÈRES

1	NOTIONS D'ERREURS	7
1	PRÉLIMINAIRES	8
1.1	Exemples	9
2	Erreurs absolues et Erreurs relatives	9
2.1	Exemple	10
2.2	Exemples	10
3	PRINCIPALES SOURCES D'ERREURS	11
4	PRECISION, CHIFFRES SIGNIFICATIFS	11
4.1	Chiffres significatifs	11
5	Cumulation des erreurs d'arrondi	12
5.1	Erreurs d'arrondi sur une somme	12
5.2	Erreurs d'arrondi sur un produit	13
6	Représentation approchée des nombres réels	13
6.1	Nombres en virgule flottante	14
6.2	Non-associativité des opérations arithmétiques.	14
6.3	Phénomènes de compensation.	15
7	SERIE D'EXERCICES	15
2	APPROXIMATION	17
1	GÉNÉRALITÉS	17
2	APPROXIMATION	17
2.1	Meilleure approximation	17
3	APPROXIMATION AU SENS DES MOINDRES CARRÉS	19
4	CARACTÉRISATION	20
4.1	Norme	20
5	SERIE D'EXERCICES	22
3	INTERPOLATION POLYNOMIALE	23
1	GÉNÉRALITÉS	24
2	POLYNOME DE LAGRANGE	25
2.1	Cas où les points sont equidistants	27
3	Estimation de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange	28
4	POLYNOME DE NEWTON	30
4.1	Différences finies	30
4.2	Différences divisées	31
4.3	Polynôme d'interpolation de Newton :	33
4.4	Erreur d'interpolation	33
4.5	Autre écriture du polynôme d'interpolation de Newton	34
5	INTERPOLATION CUBIQUE DE HERMITE	35
6	SERIE D'EXERCICES	35

4	INTEGRATION ET DÉRIVATION NUMÉRIQUE	37
1	INTÉGRATION NUMÉRIQUE	38
1.1	Méthode Générale	38
1.2	Approximation d'une intégrale	38
1.3	Utilisation de l'interpolation polynomiale	39
1.4	Etude de l'erreur d'intégration	40
1.5	Convergence des méthodes d'intégration	40
1.6	Formules de Newton Cotes	42
1.7	Formule de type fermé : des trapèzes et de Simpson	42
1.8	Formule de type ouvert :	43
1.9	Intégration par la méthode de Gauss	43
1.10	Calcul de $\int_a^b f(x)dx$	45
1.11	Erreur de l'intégration par la méthode de Gauss	45
2	SERIE D'EXERCICES	46
3	DÉRIVATION NUMÉRIQUE	48
3.1	Généralités :	48
3.2	Utilisation de l'interpolation polynomiale	49
3.3	Erreur de dérivation	50
3.4	Algorithmes de dérivation	53
3.5	Formules centrales de dérivation	55
3.6	Formules non centrales de dérivation	55
4	SERIE D'EXERCICES	56
5	RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE	57
1	METHODES DIRECTES	57
1.1	Rappel	57
1.2	Systèmes linéaires	57
1.3	Résolution d'un système triangulaire supérieur	58
2	Méthode de Gauss	59
2.1	Interprétation matricielle de la méthode de Gauss	60
3	Méthodes LU	61
3.1	Décomposition LU	61
4	Méthode de Cholesky	62
4.1	Factorisation de Cholesky	63
4.2	Algorithme de décomposition de Cholesky	64
5	SERIE D'EXERCICES	65
6	METHODES INDIRECTES	66
6.1	Les méthodes itératives	66
6.2	Différentes décomposition de A	67
6.3	Méthode de Jacobi	67
6.4	Méthode de Gauss-Seidel	67
6.5	Méthode de relaxation	68
7	Convergence des méthodes itératives	68
7.1	Cas général	68
8	SERIE D'EXERCICES	70

6	CALCUL DES VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES	73
1	Introduction	74
2	RAPPELS	74
3	Calcul direct de $\det(A - \lambda I)$	74
4	Méthode de Krylov	74
5	MÉTHODE DE LEVERRIER	76
6	Valeurs et Vecteurs Propres	77
7	La condition du calcul des valeurs propres	77
7.1	Condition du calcul des vecteurs propres	79
8	La méthode de la puissance	80
9	Méthode de la puissance inverse de Wielandt	81
10	VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES	82
11	LA CONDITION DU CALCUL DES VALEURS PROPRES	83
11.1	Condition du calcul des vecteurs propres	85
12	LA METHODE DE LA PUISSANCE	86
13	METHODE DE LA PUISSANCE INVERSE DE WIELANDT	87
14	Transformation sous forme tridiagonale (ou de Hessenberg)	89
14.1	a) A l'aide des transformations élémentaires	89
14.2	b) A l'aide des transformations orthogonales	90
14.3	Méthode de bisection pour des matrices tridiagonales	90
14.4	Méthode de bisection.	92
15	L'itération orthogonale	92
15.1	Généralisation de la méthode de la puissance (pour calculer les deux va- leurs propres dominantes).	93
15.2	Méthode de la puissance (pour le calcul de toutes les valeurs propres)	94
15.3	L'algorithm QR	95
15.4	Accélération de la convergence	96
15.5	Critère pour arrêter l'itération.	96
15.6	Le "double shift" de Francis	97
15.7	Etude de la convergence	98
16	Exercices	98
17	TRANSFORMATION SOUS FORME TRIDIAGONALE (ou de HESSENBERG)	101
17.1	a) A l'aide des transformations élémentaires	102
17.2	b) A l'aide des transformations orthogonales	102
17.3	Méthode de bisection pour des matrices tridiagonales	103
17.4	Méthode de bisection.	104
18	L'ITERATION ORTHOGONALE	105
18.1	Généralisation de la méthode de la puissance (pour calculer les deux va- leurs propres dominantes).	105
18.2	Méthode de la puissance (pour le calcul de toutes les valeurs propres)	107
18.3	L'algorithm QR	107
18.4	Accélération de la convergence	108
18.5	Critère pour arrêter l'itération.	109
18.6	Le "double shift" de Francis	110
18.7	Etude de la convergence	111
19	Exercices	111

Théorème 124. Une condition suffisante pour que le système (1.1) admette au moins une solution est que $\text{rang } A = m$.

Corollaire 125. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, une condition nécessaire et suffisante pour que le système $Ax = b$ admette une solution unique est que A soit inversible. Autrement dit $\det A \neq 0$ (ou $\text{rang } A = n$). Le système (1.1) est alors dit système de Cramer.

1.3 Résolution d'un système triangulaire supérieur

Définition 126. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, A est dite triangulaire supérieure si :

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i > j$$

Dans ce cas le système $Ax = b$ est dit triangulaire supérieur.

Remarque 127. On ne traitera pas le cas des systèmes triangulaires inférieurs car la technique de résolution est identique.

Le système d'équations $Ax = b$ triangulaire supérieur a la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Théorème 128. Soit le système triangulaire supérieur $Ax = b$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée et $b \in \mathbb{R}^n$, si :

$$a_{kk} \neq 0, \quad \forall k \in [1, n]$$

alors le système admet une solution unique et cette solution x^* est telle que :

$$x_k^* = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}x_j^*}{a_{kk}}, \quad k = \{n, n-1, \dots, 1\} \tag{1.2}$$

Nous allons étudier les méthodes de résolution du système de n équations linéaires à n inconnues $Ax = b$, par les méthodes directes. Nous entendons par méthodes directes des méthodes qui mènent à la solution en un nombre fini d'opérations élémentaires. Ces méthodes sont utilisées seulement si le nombre d'équations du système n'est pas trop élevé (généralement $n \leq 100$). La méthode de Cramer en est une, mais elle est numériquement inacceptable. Car sa mise en oeuvre demande le calcul de $n + 1$ déterminants et n divisions. Pour calculer chaque déterminant, nous devons effectuer $n!n$ multiplications et $n! - 1$ additions soit un total de $(n + 1)^2n! - 1$ opérations élémentaires. Par exemple, pour $n = 5$ on obtient 4319 opérations élémentaires. Pour $n = 10$ on obtient à peu près $4 \cdot 10^8$ opérations élémentaires. Or, dans la pratique, nous aurons à résoudre des systèmes d'ordres $n = 100, n = 1000$ voire même plus. Il est donc impossible de résoudre de tels systèmes par la méthode de Cramer. Dans ce chapitre, nous présentons essentiellement la méthode d'éliminations successives de Gauss et son interprétation matricielle, laquelle débouche sur la méthode de Cholesky pour un système à matrice définie positive. Si la matrice A n'est plus

triangulaire, nous sommes amenés à chercher une matrice M inversible telle que la matrice produit MA soit triangulaire. On résoudra alors le système :

$$MAx = Mb$$

par l'algorithme (1.2). Nous nous limitons bien entendu à des systèmes $Ax = b$ avec $\det A \neq 0$.

2 Méthode de Gauss

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée donnée et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche x^* solution du système linéaire :

$$Ax = b$$

La méthode de Gauss consiste à construire un système équivalent plus facile à résoudre (à matrice triangulaire supérieure par exemple). Deux systèmes linéaires définis par deux matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $U \in M_n(\mathbb{R})$ sont dits équivalents si leurs solutions sont identiques.

Remarque 129. - Les transformations élémentaires suivantes appliquées à un système linéaire engendrent un système linéaire équivalent : - Une équation peut être remplacée par cette même équation à laquelle on ajoute ou on retranche un certain nombre de fois une autre ligne. - La multiplication d'une équation par une constante non nulle. - La permutation de deux lignes ou de deux colonnes.

La représentation d'un système linéaire peut se faire à travers une matrice de dimension $n \cdot (n+1)$ appelée matrice augmentée. La matrice est notée $\tilde{A} = [A|b]$ et a pour forme générale :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

La résolution du système linéaire ayant pour matrice augmentée \tilde{A} peut se faire en appliquant des transformations élémentaires permettant d'obtenir un système équivalent. L'objectif de l'algorithme de Gauss est la construction d'un système triangulaire supérieur équivalent, en annulant au fur et à mesure les termes en dessous de la diagonale.

Définition 130. On appelle pivot de la transformation, l'élément a_{kk} de la matrice utilisée pour annuler les termes a_{jk} , $j > k$. La ligne k est alors appelée ligne pivot.

Théorème 131. Soit un système linéaire défini par une matrice A d'ordre n et $b \in \mathbb{R}^n$. Si A est non singulière alors il existe une matrice U d'ordre n triangulaire supérieure et $y \in \mathbb{R}^n$ tels que $Ux = y$ soit équivalent à $Ax = b$. La résolution du système $Ax = b$ se fait ensuite par résolution du système triangulaire supérieur.

Démonstration. Construisons la matrice augmentée $\tilde{A}^{(1)} = [A^{(1)}|b^{(1)}]$

$$\tilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right)$$

l'exposant indiquant le nombre de fois qu'une valeur a été stockée à la location i, j donnée. La première étape de l'algorithme de Gauss est d'annuler l'ensemble des coefficients de la première colonne en dessous de la diagonale. Cela s'obtient si $a_{11} \neq 0$ en réalisant la transformation suivante sur la ligne $i > 1$:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad j \in [1, n+1]$$

où $g_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, on obtient le système équivalent à l'étape 2 suivant donné par sa matrice augmentée :

$$\tilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right)$$

les étapes suivantes consistent à refaire le même procédé pour les colonnes suivantes. Ainsi l'étape k consiste à éliminer l'inconnu x_k dans les équations $k+1, \dots, n$. Ce qui donne les formules suivantes définies pour les lignes $i = k+1, \dots, n$ en supposant que le $k^{\text{ième}}$ pivot $a_{kk}^{(k)} \neq 0$:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - g_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad j \in [k, n+1] \quad (2.1)$$

avec $g_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$. A la dernière étape c'est-à-dire à $k = n$, on obtient le système équivalent suivant :

$$\tilde{A}^{(n)} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1, n-1}^{(n-1)} & a_{n-1, n}^{(n-1)} & \cdots & b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & | & b_n^{(n)} \end{array} \right)$$

la matrice U est donc définie comme étant la matrice $\tilde{A}^{(n)}$ et y le vecteur $b^{(n)}$. cqfd

Remarque 132. - La ligne i de la matrice $\tilde{A}^{(k)}$ n'est plus modifiée par l'algorithme dès lors que $i \leq k$. - A l'étape k , on pratique l'élimination sur une matrice de taille $n - k + 1$ lignes et $n - k + 2$ colonnes.

Remarque 133. Si lors de l'élimination l'élément $a_{kk}^{(k)}$ à l'étape k est nul alors la ligne k ne peut pas être utilisée comme ligne pivot. Dans ce cas, on cherche une ligne $j > k$ telle $a_{jk}^{(k)} \neq 0$. Si une telle ligne existe, alors on permute la ligne j et la ligne k sinon le système n'admet pas de solution.

Remarque 134. Pour minimiser les erreurs d'arrondi, on choisit la valeur du pivot la plus grande en valeur absolue. Pour ce faire deux stratégies sont possibles :

1. La méthode dite à *pivot partiel* : Au $k^{\text{ième}}$ pas de l'élimination, on choisit comme ligne de pivot celle qui, parmi les $n - k + 1$ restantes, a l'élément de module maximum en colonne et on permute dans $\tilde{A}^{(k)}$ la $k^{\text{ième}}$ ligne naturelle et celle qui réalise ce maximum.
2. La méthode dite à *pivot total* : Au $k^{\text{ième}}$ pas de l'élimination, on choisit comme pivot l'élément de plus grand module dans la matrice d'ordre $n - k + 1$ restante. On permute donc dans $\tilde{A}^{(k)}$ la $k^{\text{ième}}$ colonne naturelle et celle du pivot, ce qui modifiera l'ordre des composantes du résultat. A la fin du processus, il ne faudra pas oublier de remettre dans l'ordre initial les composantes de la solution x .

2.1 Interprétation matricielle de la méthode de Gauss

Supposons que l'on puisse effectuer l'élimination sans permutation des lignes et des colonnes. Considérons alors les matrices

$$G^{(k)} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & -g_{k+1, k} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -g_{n, k} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

avec

$$g_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad \text{pour } i = k+1, \dots, n.$$

le système (2.1) peut se mettre sous la forme

$$\tilde{A}^{(k+1)} = G^{(k)} \tilde{A}^{(k)}$$

ce qui donne

$$\tilde{A}^{(n)} = G^{(n-1)} \cdot G^{(n-2)} \cdot G^{(n-3)} \dots G^{(1)} \cdot \tilde{A}^{(1)}$$

avec

$$\tilde{A}^{(n)} = [A^{(n)} | b^{(n)}]$$

Posons

$$\begin{aligned} U &= A^{(n)} \\ L &= (G^{(n-1)} \cdot G^{(n-2)} \cdot G^{(n-3)} \dots G^{(1)})^{-1} \end{aligned}$$

U (pour Upper) est une matrice triangulaire supérieure et L (pour Lower) est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité. Donc nous avons écrit A sous la forme : $A = LU$ où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{21} & 1 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ g_{31} & g_{32} & 1 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ g_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

nous sommes donc amenés à résoudre successivement les deux systèmes triangulaires :

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \quad \text{où } y = b^{(n)}$$

3 Méthodes LU

La première phase de la méthode de Gauss consistait à transformer le système $Ax = b$ en un système triangulaire $Ux = y$ avec U une matrice triangulaire supérieure. Supposons qu'aucune permutation n'ait été effectuée, on peut alors montrer que U et y ont été obtenus à partir de A et b en les multipliant par une même matrice R triangulaire et inversible, c'est-à-dire

$$U = RA \quad \text{et} \quad y = Rb$$

on a donc $A = R^{-1}U$. Et si on pose $L = R^{-1}$ et $U = R$, on peut donc décomposer A en un produit de matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U . La méthode de Gauss appartient donc à la classe des méthodes dites méthodes LU . Elles consistent à obtenir une décomposition de la matrice A du type LU et à résoudre le système triangulaire $Ly = b$ puis ensuite le système triangulaire $Ux = y$ (L et U étant supposés inversibles).

$$Ax = b \iff LUx = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

3.1 Décomposition LU

Définition 135. Une matrice A non singulière, admet une factorisation triangulaire si il existe une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que :

$$A = LU$$

Théorème 136. Soit le système linéaire $Ax = b$, si au cours de l'élimination de Gauss de la matrice A , aucun pivot n'est nul alors il existe une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que :

$$A = LU$$

si de plus on impose $l_{kk} = 1$ alors la factorisation est unique.

La matrice U s'obtient en appliquant la méthode de Gauss tandis que la matrice L s'écrit de la manière suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

où pour $i > 1$ on a $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$. Ainsi la matrice L est composée des facteurs multiplicatifs permettant d'annuler les éléments sous le pivot. Comme il existe des problèmes simples pour lesquels un des pivots est nul, le théorème suivant permet d'étendre la factorisation LU à un cadre plus général.

Théorème 137. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A inversible puisse se factoriser sous la forme $A = LU$ est que $\det(A_k) \neq 0, \forall k = 1, 2, \dots, n-1$. Où $A_k = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,k \\ j=1,2,\dots,k}}$.

Démonstration. 1) Si $A = LU$, $A_k = L_k U_k$ et si A est inversible, $\det U = \prod_{i=1}^n u_{ii} = \prod_{i=1}^n a_{ii}^{(i)} \neq 0$. Donc $\det(A_k) = \det(L_k) \cdot \det(U_k) = \det(U_k) = \prod_{i=1}^k a_{ii}^{(i)} \neq 0$. 2) Supposons que $\det(A_k) \neq 0 \forall k = 1, 2, \dots, n-1$. Cela est vrai en particulier pour $k = 1$, donc $a_{11}^{(1)} = \det(A_1)$ et la première étape de l'élimination de Gauss est possible. Par récurrence, si on a obtenu $A^{(k)}$ pour $k \leq n-1$

$$A^{(k)} = G^{(k-1)} \cdot G^{(k-2)} \cdot G^{(k-3)} \cdots G^{(1)} \cdot A^{(1)}$$

alors $\det(A_k^{(k)}) = \det(G_k^{(k-1)}) \cdots \det(G_k^{(1)}) \det(A^{(1)}) = \det(A^{(1)}) \neq 0$ $A_k^{(k)}$ étant triangulaire on a $\prod_{i=1}^k a_{ii}^{(i)} \neq 0$ donc $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, donc la $k^{\text{ième}}$ étape de l'élimination est possible. On obtiendra finalement $A=LU$.
cqfd

Théorème 138 (méthode à pivot partiel). Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible, alors il existe une matrice de permutation P telle que les pivots de PA soient non nuls. Ainsi il existe deux matrices L et U telles que $PA = LU$.

Remarque 139. le système linéaire $Ax = b$ est équivalent au système $P Ax = P b$ et la résolution du système se fait selon les étapes suivantes :

1. Construire U, L et P ,
1. Calculer Pb ,
2. Résoudre $Ly = Pb$ (système triangulaire inférieur),
3. Résoudre $Ux = y$ (système triangulaire supérieur).

4 Méthode de Cholesky

Certains systèmes présentent des propriétés particulières. Les matrices associées à ces systèmes peuvent être symétriques, à bande, etc...La méthode de cholesky a pour but la résolution de systèmes linéaires pour lesquels la matrice associée est symétrique définie positive.

Définition 140 (Matrice symétrique). Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que A est symétrique si on a

$$A = A^t.$$

Définition 141 (Matrice définie positive). Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que A est définie positive si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq 0, \langle Ax, x \rangle > 0$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^n . C'est-à-dire :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

On définit la norme induite par :

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 142. Si A est une matrice symétrique définie positive alors :

1. $a_{ii} > 0$,
2. $a_{ij} < a_{ii}a_{jj} \quad \forall i \neq j$,
3. $\max_{j,k} |a_{jk}| < \max_i |a_{ii}|$.

Théorème 143. Si la matrice A est une matrice carrée définie positive alors elle est inversible.

Corollaire 144. Si la matrice A est une matrice carrée définie positive alors le système linéaire $Ax = b$ où $x, b \in \mathbb{R}^n$ admet une solution et une seule.

Théorème 145. Soit M une matrice carrée telle et non singulière alors la matrice $A = MM^t$ est symétrique définie positive.

Exemple 146. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$A = MM^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est définie positive.

4.1 Factorisation de Cholesky

Théorème 147. Soit A une matrice carrée d'ordre n symétrique définie positive, A peut alors se décomposer et de manière unique en

$$A = LL^t$$

où L est une matrice triangulaire inférieure avec des éléments diagonaux positifs.

Ainsi ce théorème permet de déduire que la méthode de construction des matrices définies positives engendre en fait l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Si A est une matrice symétrique définie positive alors le système $Ax = b$ peut être décomposé en $LL^t x = b$ et ce système peut se résoudre en résolvant les systèmes triangulaires :

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

4.2 Algorithme de décomposition de Cholesky

Soit A une matrice symétrique définie positive alors on a $A = LL^t$. Pour résoudre le système

$$Ax = b \quad (4.1)$$

le théorème précédent nous permet d'écrire (4.1) sous la forme $LL^t x = b$ avec L une matrice triangulaire inférieure inversible. On est donc amené à résoudre

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

Le problème consiste donc à construire explicitement la matrice $L = (l_{ij})$ triangulaire inférieure telle que

$$A = LL^t \quad \text{où } A = (a_{ij})$$

ce qui équivaut à

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} l_{jk}, \quad j \leq i.$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

en remarquant que a_{ij} est le produit de la ligne i de L et la colonne j de L^t alors on a :

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{1k} = l_{i1} l_{11} + l_{i2} l_{12} + \cdots + l_{in} l_{1n} = l_{i1} l_{11}$$

en particulier pour $i = 1$, on a $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ (l_{11} est bien positif). la connaissance de l_{11} permet de construire la première colonne de la matrice L car :

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$$

En raisonnant de la même manière pour la deuxième colonne de L , on a :

$$a_{i2} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{2k} = l_{i1} l_{21} + l_{i2} l_{22}$$

en prenant $i = 2$ alors $a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2$. D'où l'on tire

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

ensuite on a :

$$l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1} l_{21}}{l_{22}} \quad i = 3, 4, \dots, n$$

On peut généraliser la procédure au calcul de la colonne j en supposant que les $(j-1)$ colonnes ont déjà été calculées. Ainsi :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{kj} = l_{ij} l_{j1} + l_{ij} l_{j2} + \cdots + l_{ik} l_{jk} + \cdots + l_{in} l_{jn}$$

et seul l_{ij} et l_{jj} ne sont pas connus. Si on pose $i = j$, on obtient :

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

et par conséquent

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}} \quad i > j \quad \begin{array}{l} j = 2, \dots, n \\ i = j+1, \dots, n \end{array}$$

Remarque 148. La décomposition de A symétrique définie positive, sous la forme $A = LL^t$ est unique à une matrice diagonale unité près. C'est-à-dire si $A = LL^t = MM^t$, alors $M = DL$ avec D matrice diagonale telle que $d_{ii} = \pm 1$.

Remarque 149. La méthode de Cholesky permet de calculer $\det A$ par

$$\det A = \prod_{i=1}^n l_{ii}^2$$

5 SERIE D'EXERCICES

Exercice 150. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 & = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = 15 \end{cases}$$

1. En appliquant les formules de Cramer.
2. En triangularisant la matrice du système associée par la méthode de Gauss.

Exercice 151. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 & = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 & = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 & = 0 \end{cases}$$

En appliquant le principe de triangularisation de Gauss.

Exercice 152. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = 2 \\ 5x_2 + 4x_3 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 14x_3 & = 5 \end{cases}$$

1. Montrer que la matrice associée à ce système est définie positive.
2. Résoudre ce système en utilisant la méthode de Choleski.

Exercice 153. Soit les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 & = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 & = 2 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 & = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 & = -2 \end{cases}$$

Effectuer la résolution en mettant, si cela est possible, la matrice associée à chacun de ces deux systèmes, sous forme d'un produit de deux matrices triangulaires de structures différentes.