

CHAPITRE 2
**Lois Fondamentales de l'Electricité en Régime
Continu, Harmonique et Transitoire**

1. Régime continu :

On parle de **régime permanent continu** dès lors que les grandeurs électriques (courants et tensions) d'un circuit sont indépendantes du temps. Dans ce régime particulier, les inductances représentent des interrupteurs fermés et les condensateurs des interrupteurs ouverts. En continu les résistances sont donc les seuls récepteurs linéaires. En effet, les seules lois à faire intervenir pour l'analyse de tels circuits sont donc les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm. Notons enfin que l'étude d'un circuit en régime continu intervient dans de nombreuses situations pratiques, notamment dans le calcul de certains dispositifs électroniques et de mesure, [8].

1.1 Dipôle résistif

a) Résistance :

Un dipôle résistif est un dipôle passif. L'énergie qu'il absorbe est entièrement consommée par effet Joule, donc dissipée sous forme de chaleur, [4].

Un dipôle résistif est représenté par un rectangle



Figure 1: Dipôle résistif

D'autre part, la résistance d'un fil conducteur dépend de la nature du conducteur et de ses dimensions, elle se calcule à partir de la relation

$$R = \frac{\rho l}{s}$$

R	La valeur de la résistance du conducteur en ohms [Ω]
ρ	La valeur de la résistivité du conducteur en ohms.Mètres
l	La longueur du conducteur en mètres [m]
s	La section du conducteur en mètres ² [m ²]

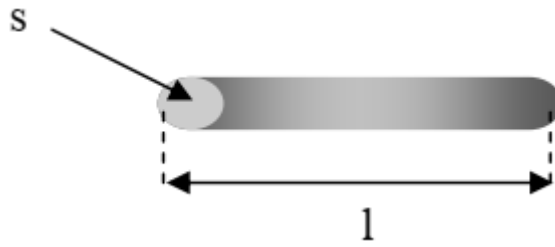
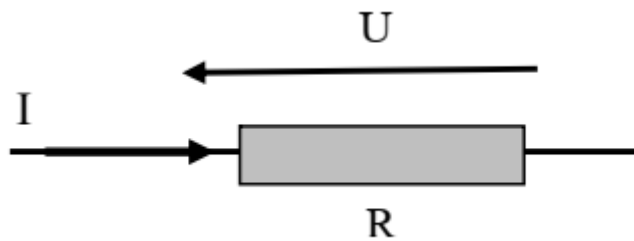


Figure 2: Conducteur rectiligne

b) Loi d'Ohm :

La représentation de la tension électrique U qui apparaît aux bornes d'un élément résistif Traversé par un courant d'intensité I est donnée ci-après.

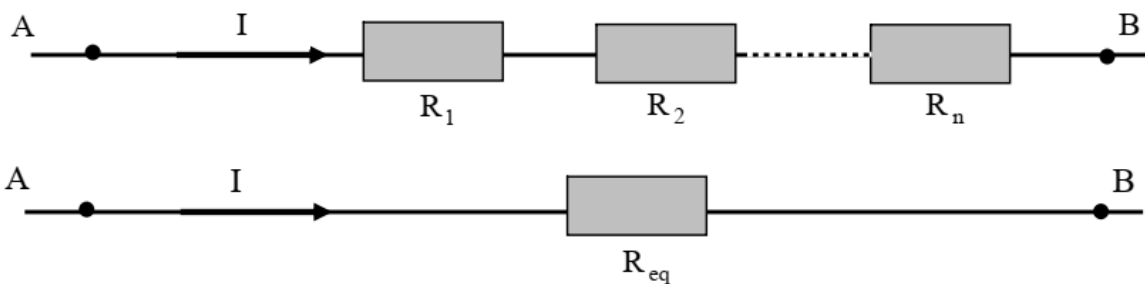


La tension U s'exprime en fonction de l'intensité I du courant par la loi d'Ohm.

$$U = R I$$

U	La tension électrique aux bornes du dipôle résistif en volts [V]
R	La valeur de la résistance en ohms [Ω]
I	L'intensité du courant électrique en ampères [A]

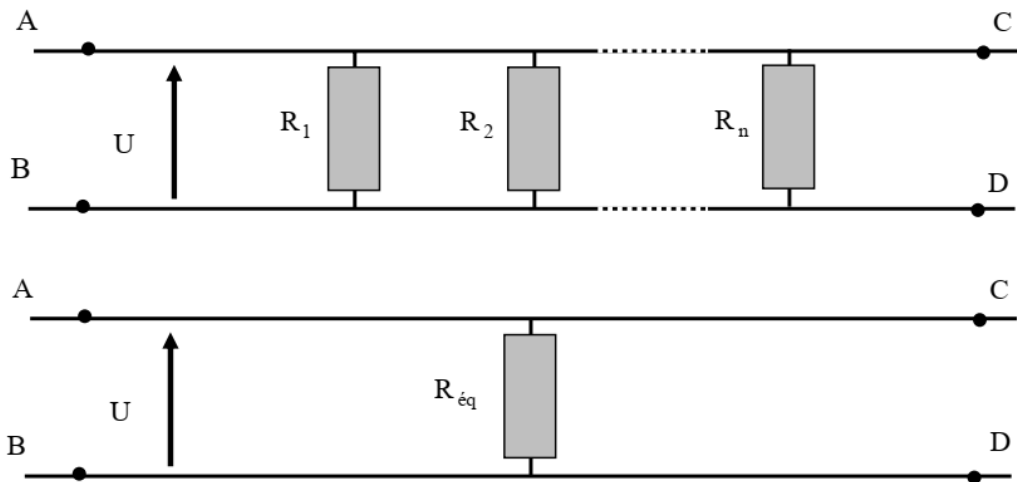
c) Association d'éléments résistifs en série :



La résistance équivalente se calcule par la relation suivante :

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

d) Association d'éléments résistifs en dérivation



La résistance équivalente se calcule par la relation suivante :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

1.2 Dipôle capacitif :

La relation caractéristique d'un condensateur idéal est :

$$i = C \frac{du}{dt}$$

- i est l'intensité du courant qui traverse le composant, exprimée en ampères (symbole: A) ;
- u est la tension aux bornes du composant, exprimée en volts (symbole : V) ;
- C est la capacité électrique du condensateur, exprimée en farads (symbole : F) ;
- $\frac{du}{dt}$ est la dérivée de la tension par rapport au temps

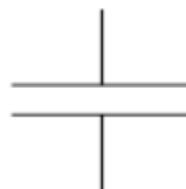
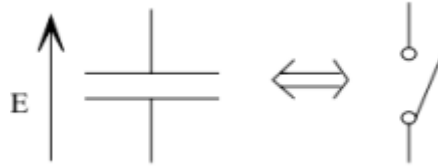


Figure 3: Dipôle capacitif

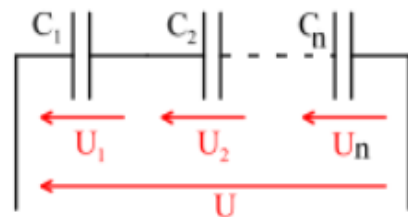
a. Capacité en continu

En régime continu, le courant traversant la capacité est nul. En effet, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.



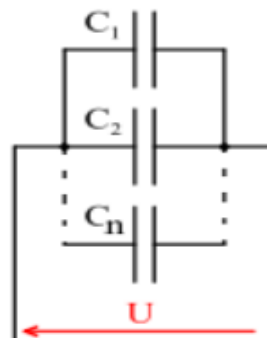
b. Association des condensateurs en série

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$



c. Association des condensateurs en parallèle :

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$



1.3 Dipôle inductif :

La tension aux bornes d'une bobine est liée à l'intensité du courant par la relation suivante :

$$u(t) = L di/dt$$

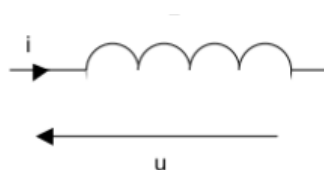
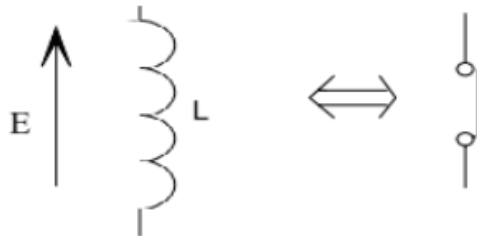


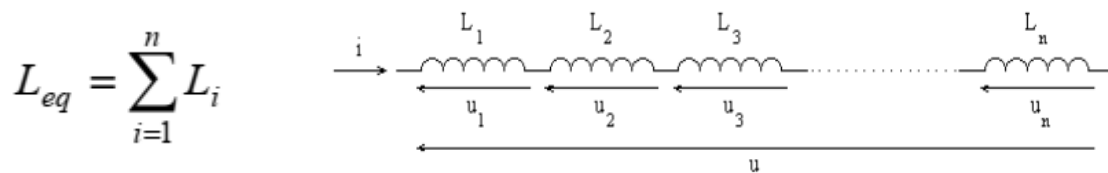
Figure 4: Dipôle inductif

a) Inductance en continu

En régime continu, la tension aux bornes de l'inductance est nulle. En effet, l'inductance se comporte comme un interrupteur fermé.

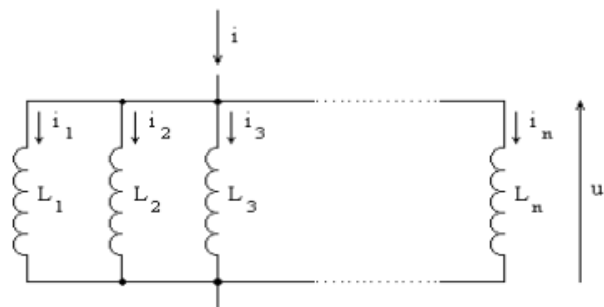


b) Association des inductances en série



c) Association des inductances en parallèle

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$$



2. Régime harmonique :

Un circuit électrique est dit **en régime permanent sinusoïdal** lorsque les excitations extérieures (courants ou tensions) sont des fonctions sinusoïdales et n'engendrant dans le circuit que des courants et des tensions de même forme. Nous rappelons que la fonction sinusoïdale joue un rôle de première importance en électricité. Cette prédominance est liée pour une part au fait que la production industrielle d'énergie électrique résulte généralement d'une conversion mécanique électrique réalisée par la mise en rotation d'un bobinage placé dans un champ d'induction magnétique, ou l'inverse. La tension induite obtenue aux bornes du bobinage est alors sinusoïdale. En effet, cette caractéristique permet

d'assurer une distribution économique et efficace (utilisation de transformateurs) de cette énergie et en facilite l'exploitation.

2.1 Caractérisation d'un signal périodique

a) Période d'un phénomène périodique :

La période, notée T , d'un signal périodique est la plus petite durée au bout de laquelle le signal se reproduit identique à lui-même.

Son unité dans le système d'unité international (S.I.) est la seconde notée s .

b) Fréquence d'un phénomène périodique

La fréquence correspond au nombre de périodes par seconde. Elle est liée à la période par la relation suivante : Son unité dans le SI est le Hertz de symbole Hz .

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{avec } f \text{ en Hz et } T \text{ en s .}$$

c) Tension maximale et tension minimale

La tension maximale U_{\max} désigne la valeur la plus élevée prise par $u(t)$ au cours du temps.

La tension minimale U_{\min} désigne la valeur la plus faible prise par $u(t)$ au cours du temps.

L'unité de U_{\max} et de U_{\min} dans le S.I est le volt.

d) Tension instantanée

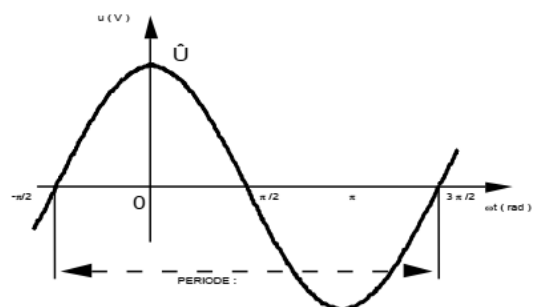
$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \phi)$$

Avec :

- u valeur instantanée de la tension. (t) :
- \hat{U} : valeur maximale de la tension, en volts.
- ω : pulsation de la tension, en radians par secondes.
- ϕ : phase de la tension à l'instant initial, en radians.
- $\omega t + \phi$: phase de la tension à l'instant t , en radians.

Relations importantes :

- $\omega = 2\pi f$. Avec f : fréquence du signal en Hertz.



- $T = 1/f$ avec T : période du signal en secondes.

e) Valeur moyenne

La valeur moyenne u_{moy} , d'une grandeur périodique quelconque $u(t)$, se calcule à partir de la relation :

$$u_{moy} = \frac{1}{T} \int_{(T)} u(t) dt$$

N B : La valeur moyenne d'un signal alternatif sinusoïdal est nulle.

f) Valeur efficace

La valeur efficace u_{eff} , d'une grandeur périodique $u(t)$ se calcule à partir de la relation :

$$u_{eff} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} u(t)^2 dt}$$

La valeur efficace d'une tension, $u(t)$, sinusoïdale et seulement dans ce cas, se déduit de la relation :

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

2.2 Représentation d'un signal sinusoïdal :

2.2.1 Représentation cartésienne :

La représentation cartésienne utilise des fonctions sinusoïdales du temps.

Les deux grandeurs suivantes sont définies ainsi:

$$\text{➤ } u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$\text{➤ } v(t) = \hat{V} \cos(\omega t + \varphi_v)$$

Elles sont représentées en concordance des temps ci après.

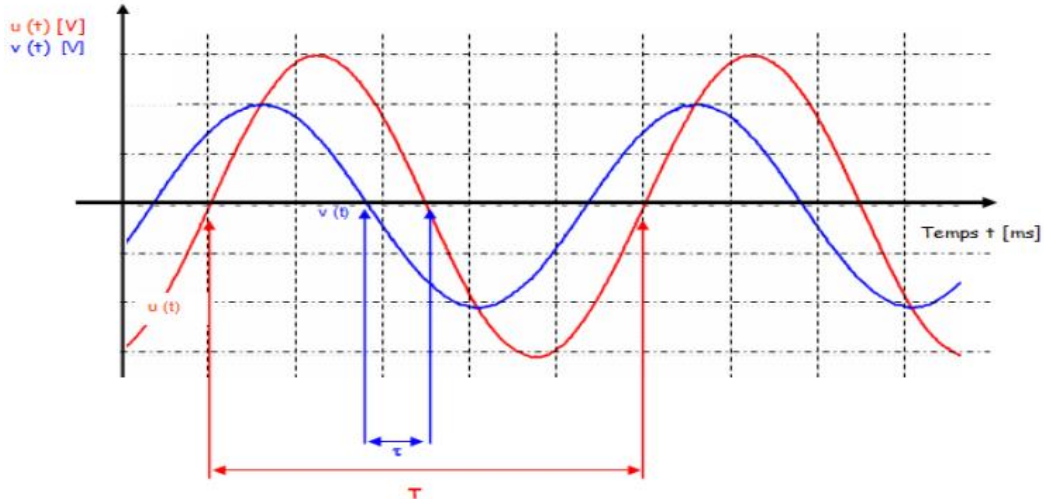


Figure 5: Représentation cartésienne de grandeurs sinusoïdales.

Les deux grandeurs $u(t)$ et $v(t)$ ne coupent pas l'axe des abscisses au même instant. Elles sont décalées dans le temps. Ce décalage horaire noté τ possède toujours la même valeur, les grandeurs $u(t)$ et $v(t)$ n'ont pas la même phase à l'instant initial. Elles sont déphasées.

a. Situation d'une courbe par rapport à l'autre

Pour savoir comment se situe une grandeur par rapport à l'autre :

- Repérer les deux courbes lorsqu'elles sont croissantes.
- Se promener sur l'axe des temps, dans le sens croissant de 0 à l'infini.
- La première courbe rencontrée est en avance sur la seconde d'un angle ϕ .

b. Calcul de l'angle de déphasage

L'angle de déphasage noté ϕ permet de savoir de quel angle sont décalées les deux grandeurs $u(t)$ et $v(t)$, il correspond à la différence entre les phases initiales ϕ_u et ϕ_v ; et se définit ainsi:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_v \quad \left| \begin{array}{ll} \varphi & \text{L'angle de déphasage entre } u(t) \text{ et } v(t) \text{ en radians [rad]} \\ \varphi_u & \text{La phase de } u(t) \text{ à l'instant initial en radians [rad]} \\ \varphi_v & \text{La phase de } v(t) \text{ à l'instant initial en radians [rad]} \end{array} \right.$$

c. Détermination graphique de l'angle de déphasage

Le déphasage se détermine également à partir de la représentation cartésienne des deux courbes $u(t)$ et $v(t)$. Nous procédons comme suit :

- Mesurer la grandeur qui représente la période T .
- Mesurer la grandeur qui représente le décalage horaire τ .
- Evaluer le rapport entre l'angle ϕ en radians et le décalage horaire τ en secondes

$$\begin{array}{l} T \rightarrow 2\pi = 360^\circ \\ \tau \rightarrow \phi \\ \dots \end{array}$$

- Le déphasage se déduit à l'aide de la relation :

$$\varphi = \frac{2\pi\tau}{T} \quad \left| \begin{array}{l} \varphi \text{ L'angle de déphasage entre } u(t) \text{ et } v(t) \text{ en radians [rad]} \\ \tau \text{ Le décalage horaire entre } u(t) \text{ et } v(t) \text{ en secondes [s]} \\ T \text{ La période de } u(t) \text{ et } v(t) \text{ en secondes [s]} \end{array} \right.$$

d. Déphasage courant – tension :

Si les deux grandeurs à étudier sont une tension $u(t)$ et un courant $i(t)$, elles se définissent ainsi :

- $u(t) = U^{\wedge} \cos(\omega t + \phi_u)$
- $i(t) = I^{\wedge} \cos(\omega t - \phi_i)$

Si en choisissant la tension u comme origine des phases, c'est-à-dire $\phi_u = 0$

La tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ se définissent ainsi :

- $u(t) = U^{\wedge} \cos(\omega t)$
- $i(t) = I^{\wedge} \cos(\omega t - \phi_i)$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_i > 0 \quad \text{Le courant } i(t) \text{ est en retard sur la tension } u(t) . \\ \varphi_i < 0 \quad \text{Le courant } i(t) \text{ est en avance sur la tension } u(t) . \\ \varphi_i = 0 \quad \text{Le courant } i(t) \text{ et la tension } u(t) \text{ sont en phase.} \end{array} \right.$$

2.2.2 Représentation vectorielle :

Lorsque deux tensions sinusoïdales $u(t)$ et $v(t)$ sont à l'étude, elles peuvent être représentées à l'aide de vecteurs à partir de leurs caractéristiques, ainsi pour :

- $u(t) = U \cos(\omega t)$
- $v(t) = V \cos(\omega t + \phi_v)$

Dans ce cas on a :

- La tension $u(t)$ possède une phase nulle à l'instant initial.
- La tension $v(t)$ est déphasée de l'angle ϕ_v par rapport à $u(t)$.
- Les valeurs efficaces de $u(t)$, $v(t)$ sont égales à U et V en successives

Le vecteur qui caractérise la tension $u(t)$:

- Est porté par l'axe pris comme origine des phases.
- Sa longueur est proportionnelle à U la valeur efficace de $u(t)$

Le vecteur qui caractérise la tension $v(t)$:

- Est décalé d'un angle ϕ_v dans les sens positif par rapport à l'axe origine des phases.
- Sa longueur est proportionnelle à V qui est la valeur efficace de $v(t)$

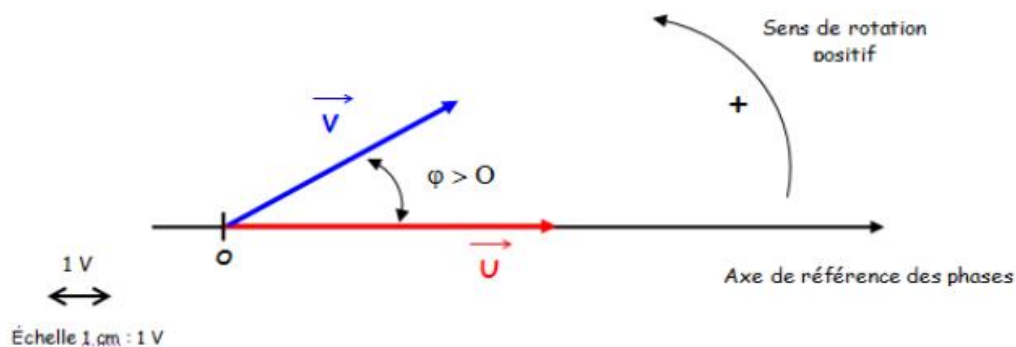


Figure 6. Représentation de Fresnel, $v(t)$ en avance sur $u(t)$

Dans les mêmes conditions que précédemment, mais si l'angle ϕ_u est négatif, la tension $v(t)$ est alors en retard sur $u(t)$ et la représentation devient ainsi :

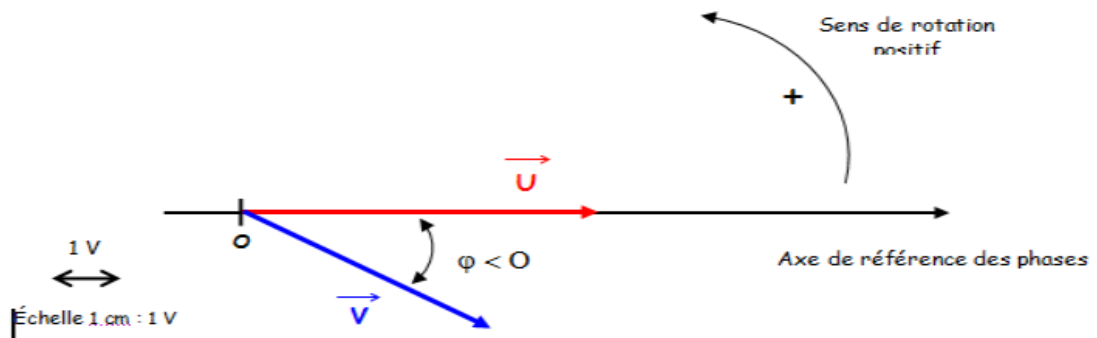


Figure 7. Représentation de Fresnel, $v(t)$ en retard sur $u(t)$

2.3 Etude des dipôles R-L-C :

a) La résistance R :

Soit les oscillogrammes de la tension $u(t)$ et du courant $i(t)$ sont donnés ci-dessous :

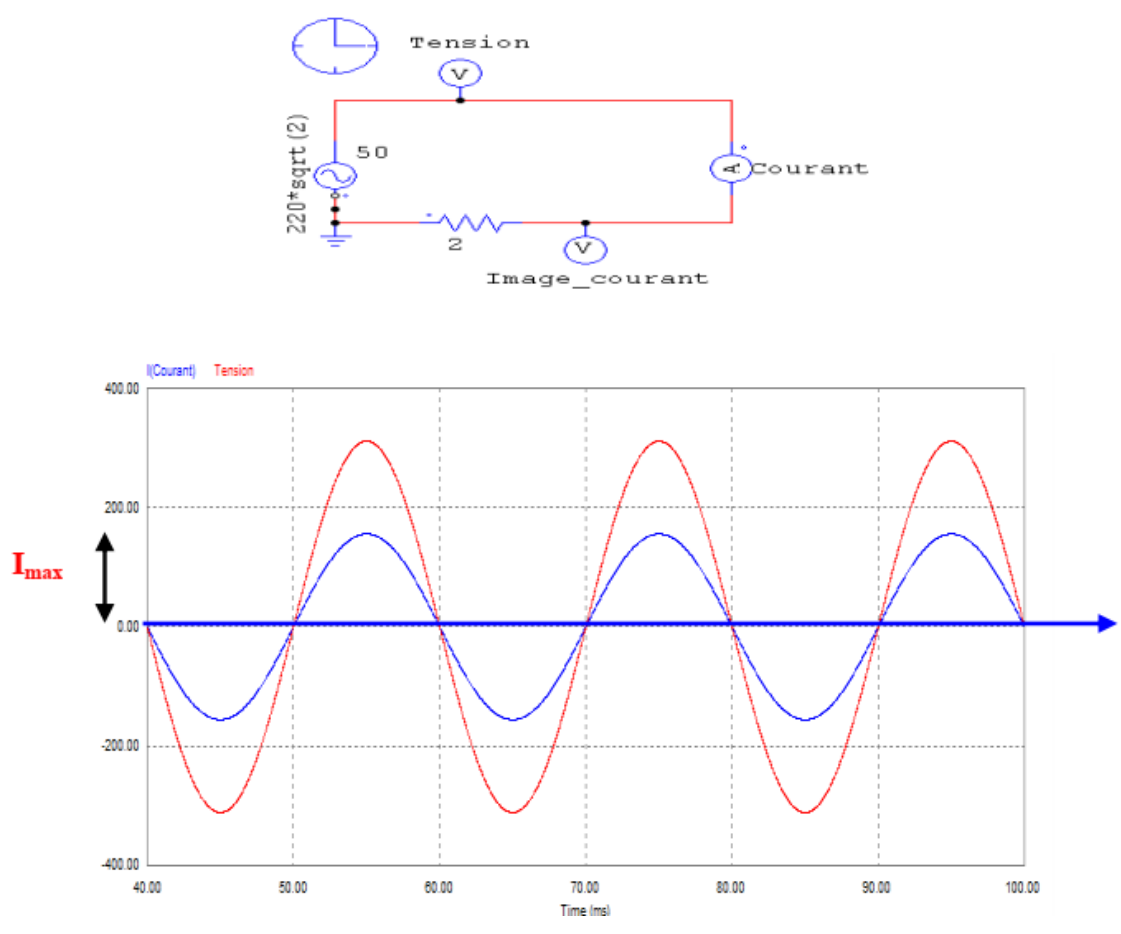


Figure 8: Oscillogrammes de la tension $u(t)$ et du courant $i(t)$

✚ **Relation entre les valeurs efficaces :**

$$U = R.I$$

U : La valeur efficace de la tension $u(t)$ en volts [V]

R : La valeur de la résistance en ohms [Ω]

I : La valeur efficace de l'intensité du courant i en ampères [A]

✚ **Relation cartésienne entre $u(t)$ et $i(t)$:**

➤ $u(t) = U^{\wedge} \cos(\omega t)$

➤ $i(t) = I^{\wedge} \cos(\omega t)$

La tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont en phase, le déphasage est donc nul

✚ **Relation instantané entre $u(t)$ et $i(t)$:**

$$u(t) = R i(t)$$

$u(t)$ La valeur instantanée de la tension en volts [V]

R La valeur de la résistance en ohms [Ω].

$i(t)$ La valeur instantanée de l'intensité du courant en ampères
[A]

✚ **Relations complexes entre \underline{U} et \underline{I} :**

$$\underline{U} = R\underline{I}$$

Le rapport entre \underline{U} et \underline{I} est appelée impédance [4]. Son expression est :

$$\underline{Z} = R$$

✚ **La représentation des vecteurs représentant $u(t)$ et $i(t)$:**

Elle est la suivante :

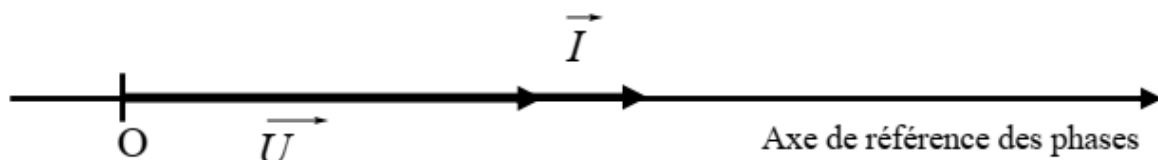


Figure 9: Représentation de Fresnel pour une résistance.

b) Le condensateur C :

La figure ci-dessous montre l'évolution de la tension aux bornes du condensateur et le courant qui le parcourt.

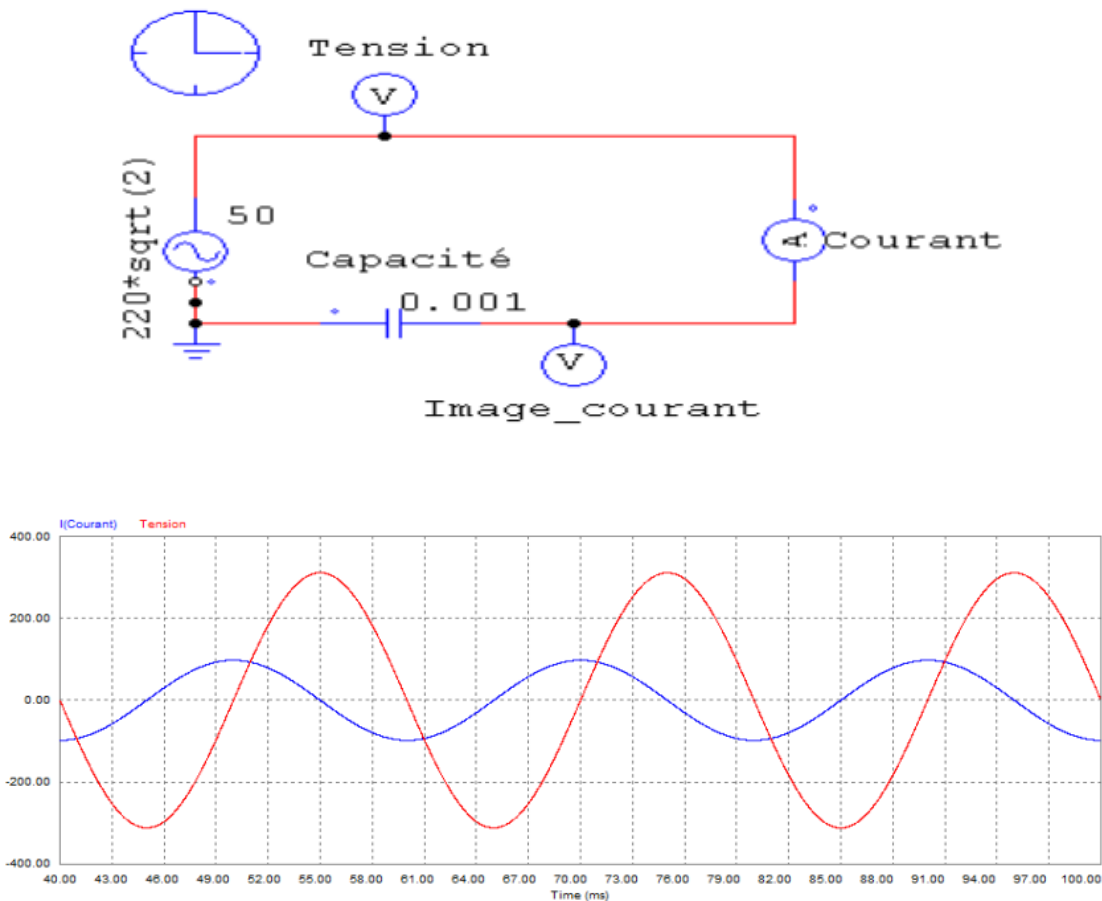


Figure 10: Visualisation de $u(t)$ et $i(t)$ dans le cas d'un condensateur

Relation entre les valeurs efficaces :

$$U = \frac{1}{C\omega} I$$

- U La valeur efficace de la tension $u(t)$ en volts [V]
- C La valeur de la capacité du condensateur en farads [F]
- ω La pulsation de $u(t)$ et $i(t)$ en radians par seconde [rad s⁻¹]
- I La valeur efficace de l'intensité du courant $i(t)$ en ampères [A]

✚ **Relation cartésienne entre u(t) et i(t) :**

➤ $u(t) = U^{\wedge} \cos(\omega t)$

➤ $i(t) = I^{\wedge} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

La tension u (t) et le courant i (t) sont déphasés de 90° ou en radians, $\frac{\pi}{2}$, le courant est en avance sur la tension,

✚ **Les valeurs instantanées entre u(t) et i(t):**

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

✚ **Relations complexes entre U et I :**

$$\underline{U} = \frac{1}{jC \omega} \underline{I}$$

Le rapport entre \underline{U} et \underline{I} est appelée impédance [4]. Son expression est :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC \omega}$$

✚ **La représentation des vecteurs représentant u (t) et i (t) est la suivante :**

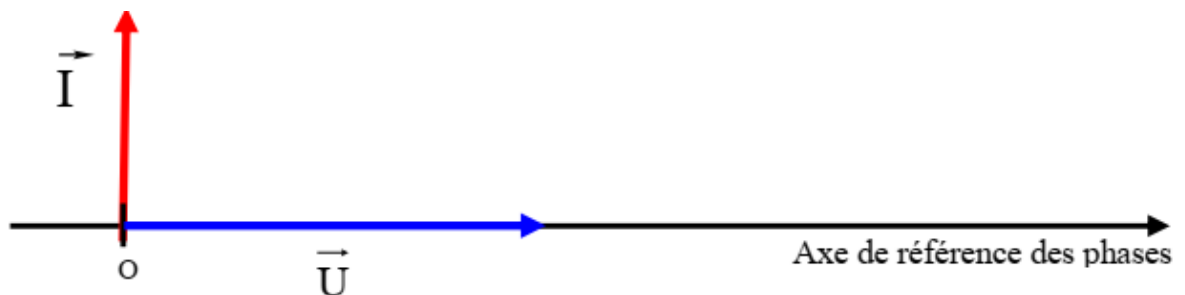


Figure 11: Représentation de Fresnel pour une résistance

c) **L'inductance L :**

Les oscillogrammes de la tension u (t) et du courant i (t) sont donnés ci-dessous :

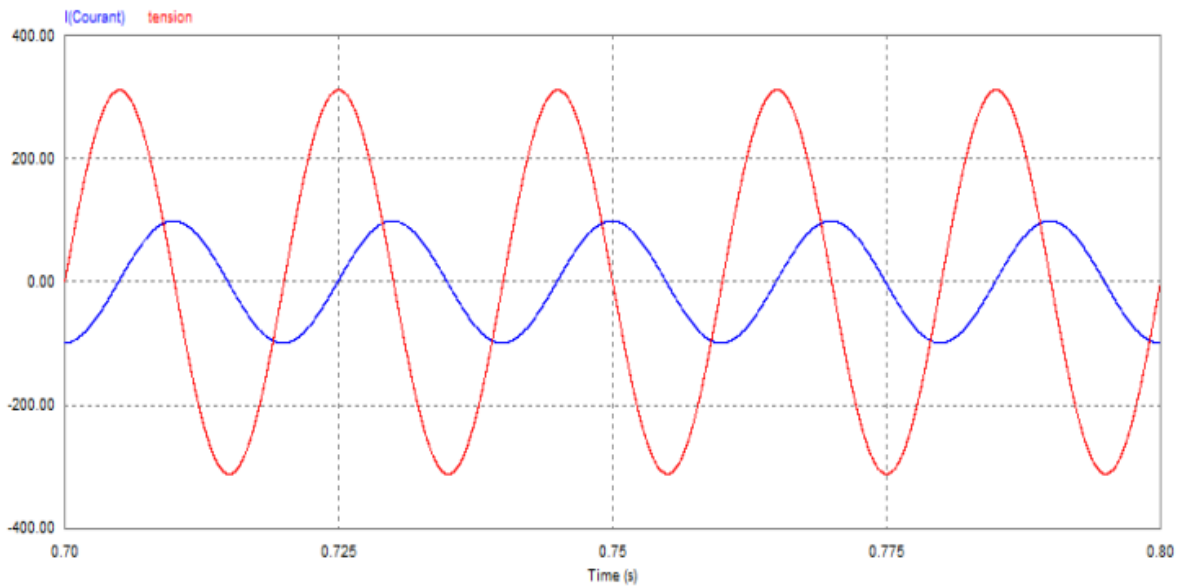
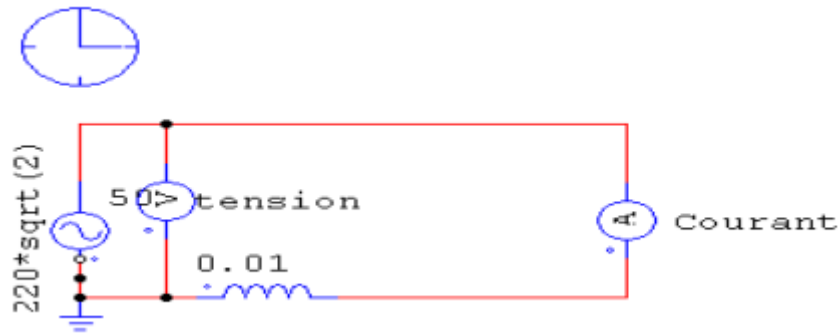


Figure 12: Visualisation de $u(t)$ et $i(t)$ dans le cas de l'inductance.

✚ Relation entre les valeurs efficaces :

$$U = L \omega I$$

U La valeur efficace de la tension $u(t)$ en volts [V]

L La valeur de l'inductance en henrys [H]

ω La pulsation de $u(t)$ et $i(t)$ en radians par seconde [rads^{-1}]

I La valeur efficace de l'intensité du courant $i(t)$ en ampères [A]

✚ **Relation cartésienne entre $u(t)$ et $i(t)$:**

$$\text{✚ } u(t) = \hat{U} \cos(\omega t)$$

$$\text{✚ } i(t) = \hat{I} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

La tension u et le courant i sont déphasés de 90° ou en radians, $\frac{\pi}{2}$, le courant est en retard sur la tension.

✚ **Les valeurs instantanées entre $u(t)$ et $i(t)$:**

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$u(t)$ La valeur instantanée de la tension en volts [V]

L La valeur de l'inductance en henrys [H]

$\frac{di(t)}{dt}$ La dérivée du courant i par rapport au temps

✚ **Relations complexes entre \underline{U} et \underline{I} :**

$$\underline{U} = jL \omega \underline{I}$$

Le rapport entre \underline{U} et \underline{I} est appelée impédance [4]. Son expression est :

$$\underline{Z} = jL \omega$$

La représentation des vecteurs représentant $u(t)$ et $i(t)$ est la suivante :

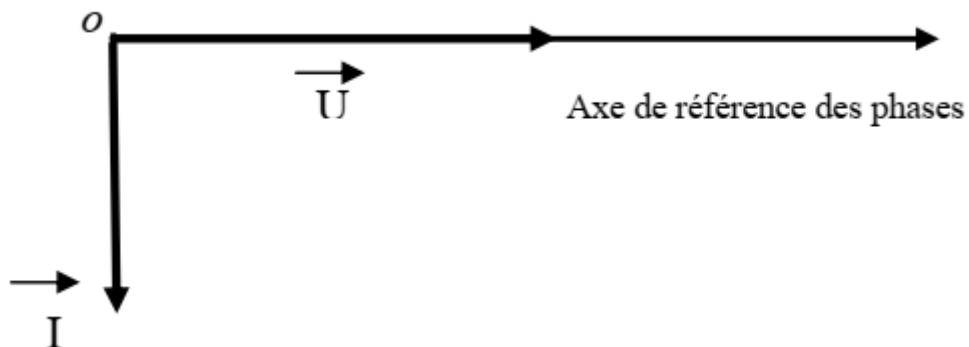


Figure 13: Représentation de Fresnel pour une résistance

2.4 Puissances en régime sinusoïdal (instantanée, active, réactive, apparente) :

En physique, une puissance représente une quantité d'énergie par unité de temps. Son unité est le Watt ($1W = 1J/s$). Le concept de puissance est un outil indispensable en électrotechnique, il permet souvent d'avoir une vision globale des systèmes et de résoudre facilement certains problèmes par la technique du bilan de puissances.

a. Puissance instantanée

La valeur instantanée de la puissance est par définition le produit des valeurs instantanées de la tension et du courant, on obtient :

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) \text{ (elle s'exprime en Watts)}$$

A cause du déphasage entre U et I sur le dipôle nous allons identifier plusieurs notions de Puissance

b. Puissance active :

En règle générale, la puissance qui motive les systèmes de conversion d'énergie est la puissance moyenne des systèmes, on l'appelle aussi puissance active. La puissance active est la valeur moyenne de la puissance instantanée. Notée P, elle s'exprime en Watts (W), elle dépend des valeurs efficaces de U et de I et du déphasage φ entre les deux grandeurs.

$$P = U I \cos\varphi \text{ (Watts)}$$

La puissance active absorbée par un récepteur est toujours positive. La définition théorique de la puissance dite active, fait apparaître directement la notion de facteur de puissance.

c. Puissance réactive

La puissance réactive apparaît lorsque l'installation contient des récepteurs inductifs et des récepteurs capacitifs. Les alimentations des circuits magnétiques des machines électriques (moteurs, transformateurs, ballast tube fluorescent,...) consomment de la puissance réactive. Les condensateurs quant à eux produisent de la puissance réactive (compensation du réactif). Par analogie la puissance réactive Q est donnée par la relation :

$$Q = U I \sin\varphi \text{ (elle s'exprime en voltampère réactif (var))}$$

Le signe de la puissance réactive est fonction de l'angle de déphasage produit par le récepteur considéré :

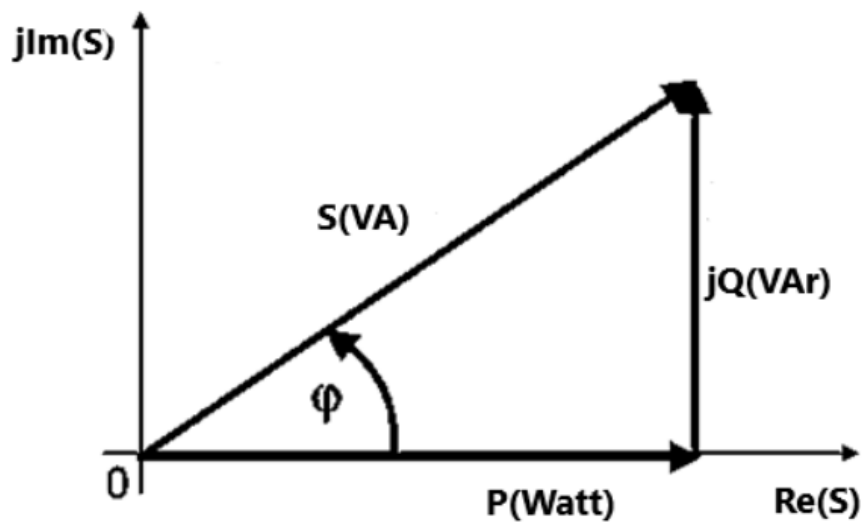
- pour un récepteur inductif ($\varphi > 0$) la puissance réactive est positive,
- pour un récepteur capacitif ($\varphi < 0$) la puissance réactive est négative.

d. Puissance apparente

Cette puissance est souvent appelée «puissance de dimensionnement», elle est la grandeur caractéristique de l'isolation et de la section des conducteurs, c'est-à-dire des dimensions des appareillages. La puissance apparente est une caractéristique de construction des machines électriques. La puissance apparente nominale est alors :

$$S_n = U_n I_n \text{ (Volts Ampères)}$$

On obtient ainsi un triangle rectangle à partir duquel on tire la relation entre P, Q et S



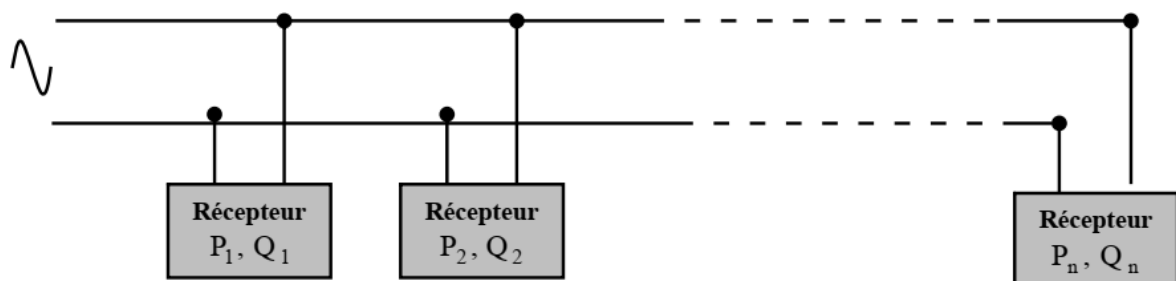
$$S^2 = P^2 + Q^2$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

PUISSANCE ACTIVE	$P = U.I \cos\varphi$	U en volts I en ampères P en Watts (W)
PUISSANCE RÉACTIVE	$Q = U.I \sin\varphi$	U en volts I en ampères Q en Voltampère réactif (var)
PUISSANCE APPARENTE	$S = U.I$	U en volts I en ampères S en Voltampère (VA)

2.5 Théorème de Boucherot :

Le théorème de Boucherot énonce la conservation des puissances actives et réactives. Dans tout circuit électrique :



- ✓ La puissance active totale consommée est égale à la somme arithmétique des puissances actives consommées par chaque récepteur $P = P_1 + P_2 + P_3$
- ✓ La puissance réactive totale consommée est la somme algébrique des puissances réactives consommées par chaque récepteur.
Ainsi dans le montage de la figure. $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$
- ✓ Par contre les puissances apparentes ne se conservent pas. S ne égal pas à $S_1 + S_2 + S_3$
Cette méthode, s'applique à tout type de groupements, série ou parallèle.

Pour appliquer la méthode de Boucheront à un circuit, il faut faire le bilan des puissances actives et réactives de tous les dipôles de l'installation électrique. Ce bilan peut se présenter sous forme d'un tableau :

Dipôles	Puissance active (W)	Puissance réactive (Var)
Récepteur 1	P_1	$Q_1 = P_1 \operatorname{tg}\varphi_1$
Récepteur 2	P_2	$Q_2 = P_2 \operatorname{tg}\varphi_2$
Récepteur 3	P_3	$Q_3 = P_3 \operatorname{tg}\varphi_3$
Installation	$P = P_1 + P_2 + P_3$	$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

La puissance apparente totale se calcule par la relation :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

3. Régime transitoire :

En réalité il existe une période de « mise en route » au moment où l'utilisateur allume le générateur, courant et tension vont évoluer avant d'atteindre le régime permanent. Cette phase correspond au régime transitoire, [14].

Plus généralement, il existe un régime transitoire entre deux régimes permanents. Exemple :

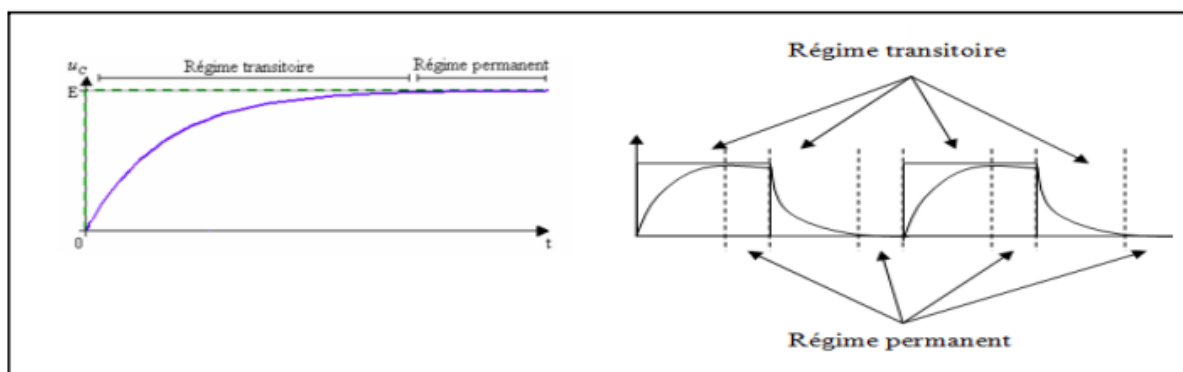
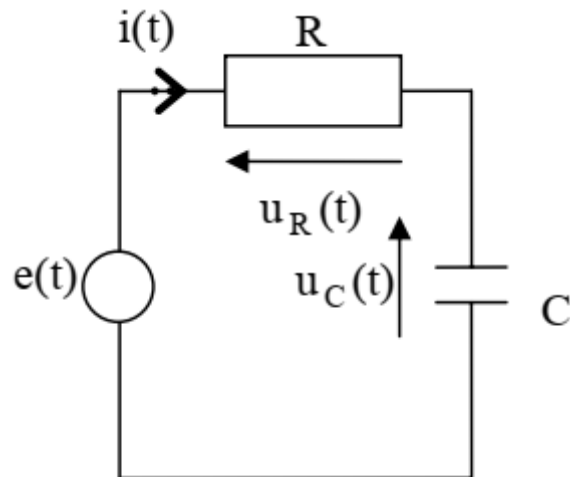


Figure 14: Régime transitoire entre deux régimes permanents.

L'étude du régime transitoire d'un circuit permet de déterminer de nombreuses caractéristiques de celui-ci

3.1 Exemples de circuit du premier ordre :

Circuit n°1 :



Maille du circuit : $e(t) = u_R(t) + u_C(t) = Ri(t) + u_C(t)$

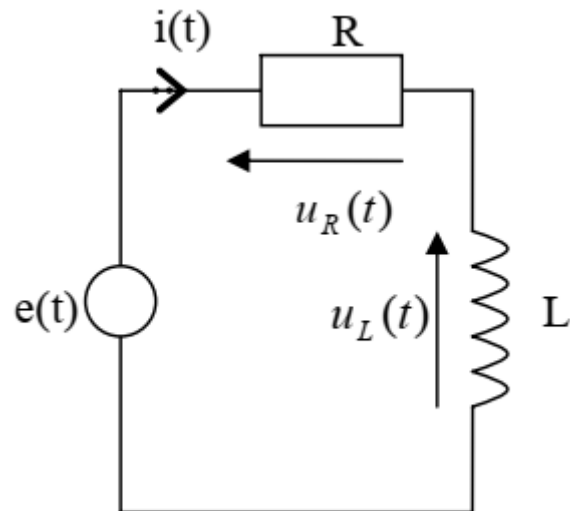
Or,

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

On a donc : $e(t) = RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$

$$\Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_C(t) = \frac{e(t)}{RC}$$

Circuit n°2 :



$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) = u_R(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

Or $u_R(t) = Ri(t) \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_R(t)}{dt}$ On a :

On a donc : $e(t) = u_R(t) + \frac{L}{R} \cdot \frac{du_R(t)}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{du_R(t)}{dt} + \frac{1}{\frac{L}{R}} u_R(t) = \frac{e(t)}{\frac{L}{R}}$$

3.2 Méthode de résolution d'une équation différentielle du premier ordre :

Les deux équations différentielles des circuits précédents sont de la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = \frac{1}{\tau} y(t)$$

Remarque :

- ✓ t est homogène à un temps (seconde)

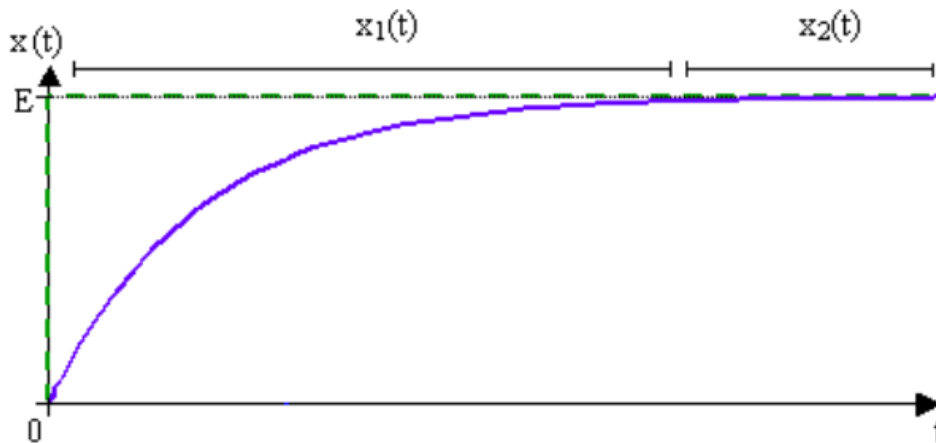
✓ $y(t)$ dépend du type de génération utilisé $\begin{pmatrix} \text{contenu} \\ \text{sinus} \\ \text{carré} \end{pmatrix}$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Avec $x_1(t)$ solution de l'équation sans second membre (ESSM) : $\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x_1(t) = 0$

Et $x_2(t)$ solution particulière de l'équation qui dépend de la nature de $y(t)$.



Cherchons l'expression de $x_1(t)$:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x_1(t) = 0 \Rightarrow \text{(ESSM)}$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{x_1(t)}{\tau} \Leftrightarrow \frac{dx_1(t)}{x_1(t)} = -\frac{dt}{\tau} \Leftrightarrow \int \frac{dx_1(t)}{x_1(t)} = \int -\frac{dt}{\tau} \Leftrightarrow \ln|x_1(t)| + K_1 = -\frac{t}{\tau} + K_2$$

$$\Leftrightarrow \ln|x_1(t)| = -\frac{t}{\tau} + K_3 \quad (K_3 = K_2 - K_1)$$

$$\Leftrightarrow x_1(t) = e^{-\frac{t}{\tau} + K_3} \Leftrightarrow x_1(t) = e^{K_3} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soit :

$$x_1(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } k = e^{K_3}$$

Finalement : $x(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow x(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + x_2(t)$

✓ **Circuit (RC)**

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{e(t)}{RC} \Rightarrow u_c(t) = K_c e^{-\frac{t}{RC}} + u_{c2}(t)$$

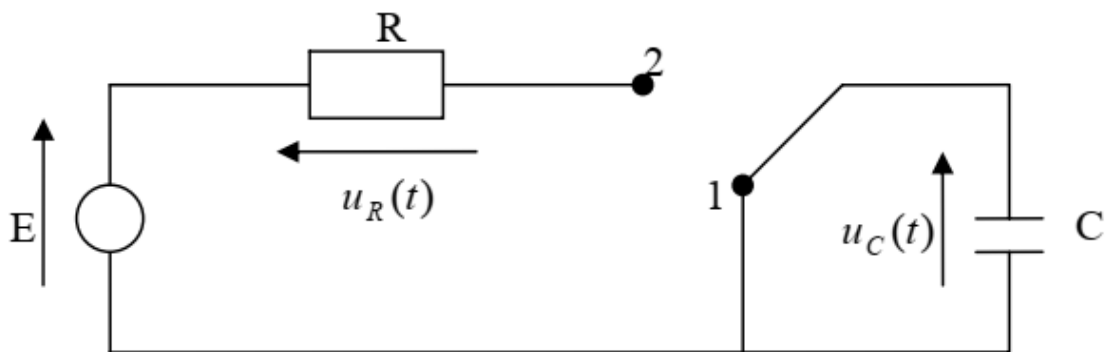
✓ **Circuit RL**

$$\frac{du_R(t)}{dt} + \frac{1}{\frac{L}{R}} u_R(t) = \frac{e(t)}{\frac{L}{R}} \Rightarrow u_R(t) = K_R e^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}} + u_{R2}(t)$$

Pour connaître parfaitement $u_C(t)$ et $u_R(t)$, il faut :

- Déterminer K_C et K_R à partir de conditions expérimentales.
- Déterminer $u_{C2}(t)$ et $u_{R2}(t)$ à partir du type de générateur utilisé.

3.3 Charge d'un condensateur sous une tension constante à travers une résistance :



À $t = 0$, on commute l'interrupteur, il passe alors en position 2.

a. Equation différentielle du circuit :

- $t < 0$: interrupteur en position 1.

$$u_C(t) = 0$$

- $t = 0$: interrupteur passe en position 2.

$$E = u_C(t) + u_R(t)$$

$$= u_C(t) + Ri(t)$$

$$= RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

$$\Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C(t) = \frac{1}{\tau} E \quad \text{avec } t \text{ en seconde.}$$

b. Solution de l'équation différentielle :

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C2}(t)$$

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C2}(t)$$

Régime transitoire

Régime permanent

$u_{C1}(t)$: cette tension est solution de $\frac{du_{C1}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u_{C1}(t) = 0$:

$$\Rightarrow u_{C1}(t) = Ke^{\frac{-t}{\tau}}$$

- $u_{C1}(t)$ croît de façon exponentielle jusqu'à atteindre le régime permanent.
- $u_{C2}(t)$, le générateur délivre une tension constante. $E \rightarrow u_{C2}(t)$ (régime permanent).

Donc :

$$\frac{du_{C2}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u_{C2}(t) = \frac{E}{\zeta}$$

↑ $u_{C2}(t)$ est une constante

$$\Rightarrow u_{C2}(t) = E$$

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C2}(t) = Ke^{\frac{-t}{\tau}} + E$$

Que vaut K ?

On utilise les conditions initiales:

à $t = 0^-$, interrupteur en position (1) et $u_C(t = 0) = 0$.

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas connaître de discontinuité.

$$\Rightarrow u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+) = 0$$

$$\Rightarrow u_C(t = 0^+) = 0$$

$$u_C(t = 0^+)$$

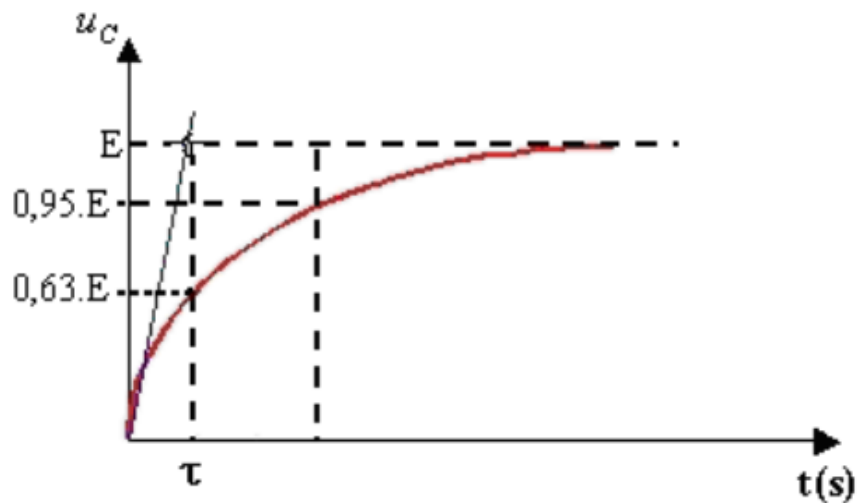
Par conséquent
$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

3.4 Représentation :

a. Représentation de $u_C(t)$:

$$t = 0, u_C(t = 0) = 0$$

$$t \rightarrow \infty, u_C(t \rightarrow \infty) = E$$



$$t = \tau \quad Y(t) = E$$

La vitesse à laquelle $u_C(t)$ atteint le régime permanent E dépend du paramètre $t = RC$ (en seconde).

- Comment déterminer t sur ce graphe :

Déterminons l'équation de la tangente à l'origine $y(t) = at$ avec $a = \left(\frac{du_C(t)}{dt} \right)_{t=0}$,

$$\text{à } u_C(t) = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ donc } a = \left(\frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)_{t=0} = \frac{E}{\tau}$$

Par conséquent

$$y(t) = \frac{E}{\tau} t$$

L'équation de la tangente à l'origine :

la tension u_C a atteint 63% de sa valeur finale.

$$\text{A } t = \tau, u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,63E,$$

$$\text{A } t = 3\tau, u_C(3\tau) = E(1 - e^{-3}) \approx 0,95E$$

$$\text{A } t = 5\tau, u_C(5\tau) = E(1 - e^{-5}) \approx 0,99E$$

On peut considérer que le circuit se trouve en régime permanent au bout de $t = 5\tau$.

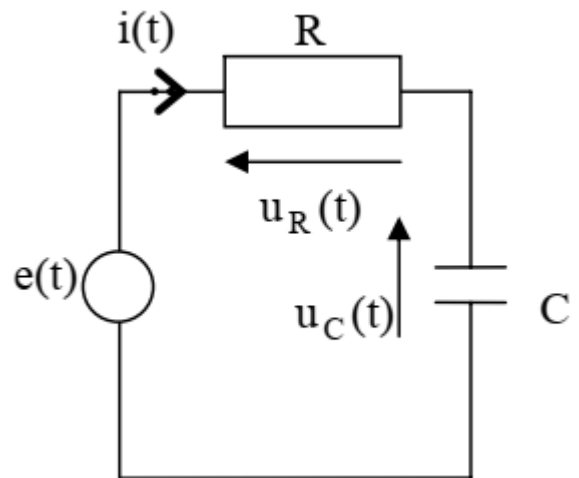
Remarque :

Pourrait-on prévoir (sans calcul) qu'en régime permanent

$$u_C(t) = E?$$

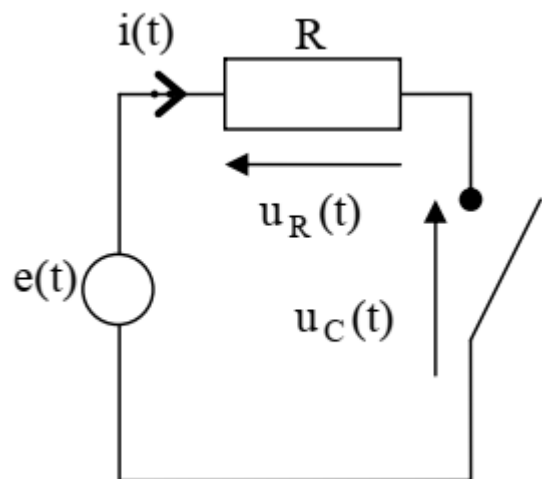
$$\text{Avec } i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\text{Régime permanent } \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = 0, \Rightarrow i(t) = 0$$



Le circuit est équivalent (en régime permanent) à :

$$E = u_R(t) + u_C(t) \Rightarrow u_C(t) = E$$



b. Représentation de $i(t)$:

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = RC.$$

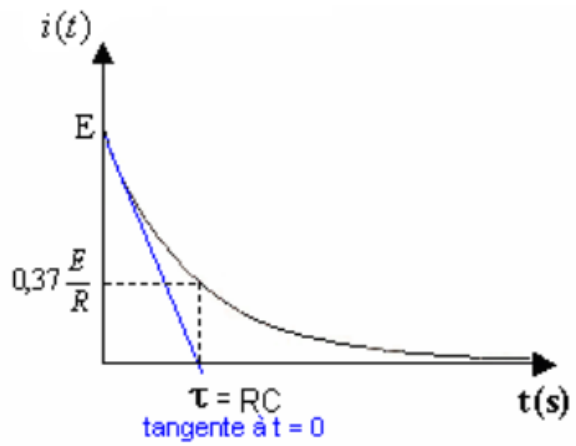
Aux bornes du condensateur

$$i(t) = C \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Homogène.

$$i(t = 0) = \frac{E}{R}$$

$$i(t \rightarrow \infty) = 0$$



Remarque :

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut être discontinue, ce qui n'est pas le cas du courant qui le traverse.

CHAPITRE 3

Circuits et Puissance Electrique en Régime Alternatif Triphasé

1. Introduction

Un système triphasé est un ensemble de 3 grandeurs (tensions ou courants) sinusoïdales de même fréquence, déphasées les unes par rapport aux autres. Le système est symétrique si les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales sont égales et si le déphasage entre deux grandeurs consécutives vaut $2\pi/3$. Le régime triphasé présente plusieurs avantages par rapport au régime monophasé puisque les machines triphasées ont des puissances de plus de 50% supérieures aux machines monophasées de même masse et donc leurs prix sont moins élevés (le prix est directement proportionnel à la masse de la machine). En outre, lors du transport de l'énergie électrique, les pertes sont moindres en triphasé [15, 16]. En effet, la distribution se fait à partir de quatre bornes :

- Trois bornes de **phase** repérées par 1, 2, 3 ou A, B, C ou R, S, T ;
- Une borne **neutre** N.
- Le réseau triphasé est présenté soit avec des tensions simples (v_1 , v_2 et v_3) ou des tensions composées (u) tel que montré ci-dessous.

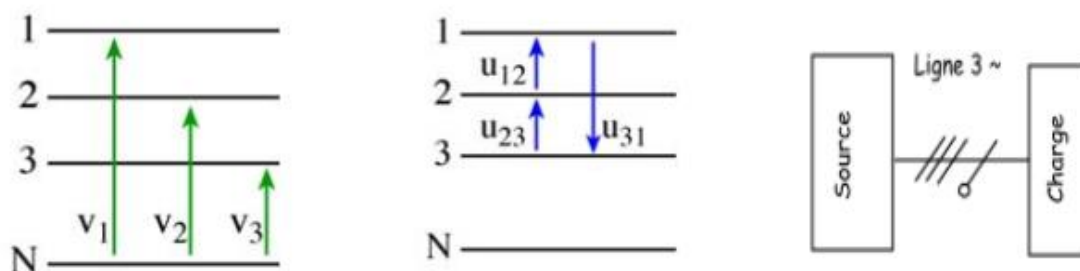


Figure 1: Système triphasé symboles et notation

2. Etude des tensions simples

2.1 Observation à l'oscilloscope

- Les tensions sont déphasées de $2\pi/3$ l'une par rapport à l'autre ;
- Elles ont la même valeur efficace.

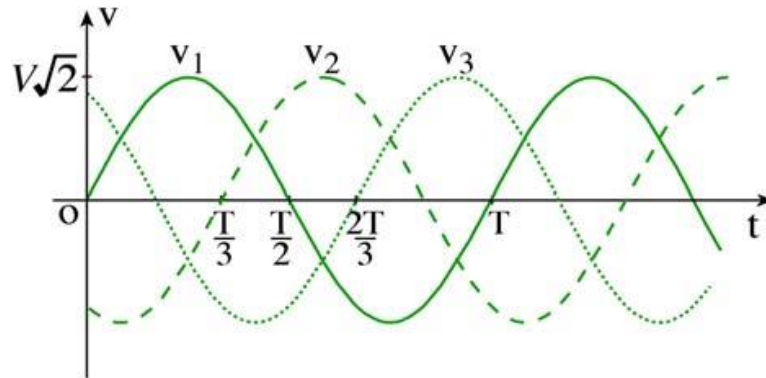


Figure 2: Évolution des tensions triphasées simples

Un système triphasé est équilibré lorsque les trois tensions possèdent la même valeur efficace

et qu'elles sont déphasées de $2\pi/3$ l'une par rapport à l'autre, [16].

2.2 Equations horaires

$$v_1(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t)$$

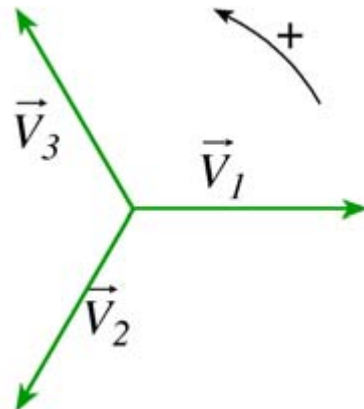
$$v_2(t) = V\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_3(t) = V\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

2.3 Vecteurs de Fresnel associés

On déduit des équations horaires les vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{V}_2 \begin{pmatrix} V \\ -\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} ; \vec{V}_3 \begin{pmatrix} V \\ -\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix}$$



Le système est équilibré direct

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0} \Rightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

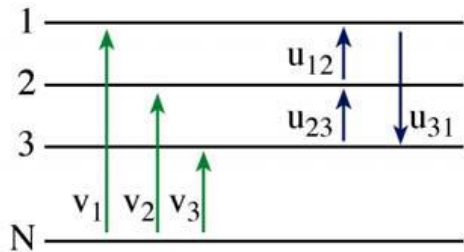
Equilibré car la construction de Fresnel montre que

Direct car un observateur immobile verrait les vecteurs défiler devant lui dans l'ordre 1, 2 et 3

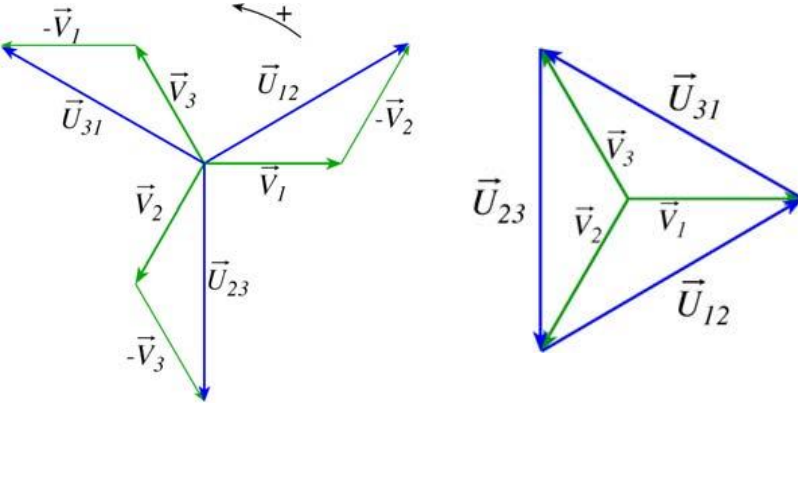
3. Etude des tensions composées

1. Définition

Les tensions composées ont même fréquence que les tensions simples.

$$\begin{aligned}
 u_{12} = v_1 - v_2 &\Rightarrow \vec{U}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \\
 u_{23} = v_2 - v_3 &\Rightarrow \vec{U}_{23} = \vec{V}_2 - \vec{V}_3 \\
 u_{31} = v_3 - v_1 &\Rightarrow \vec{U}_{31} = \vec{V}_3 - \vec{V}_1
 \end{aligned}$$


2. Vecteurs de Fresnel associés :

$$\begin{aligned}
 \vec{U}_1 &\left(\frac{U}{6} \right) \\
 \vec{U}_2 &\left(\frac{-3U}{6} \right) \\
 \vec{U}_3 &\left(\frac{-7U}{6} \right)
 \end{aligned}$$


Si $\vec{U}_{12} + \vec{U}_{23} + \vec{U}_{31} = \vec{0} \Leftrightarrow u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0$ le réseau est équilibré :

Le système des trois tensions composées est équilibré direct.

3. Equations horaires et oscillogrammes :

$$u_{12}(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$u_{23}(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$u_{31}(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{7\pi}{6})$$

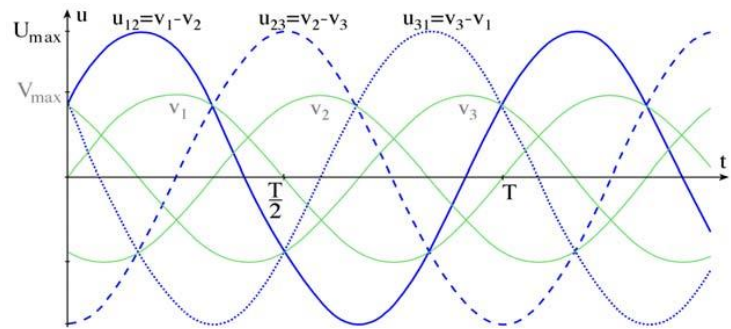


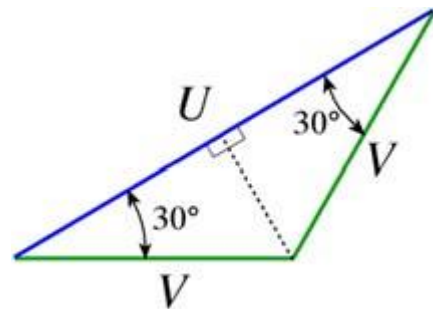
Figure 4: Oscillogramme des tensions triphasées simples et composées

4. Relation entre U et V

$$U = 2V \cos 30 \quad \text{soit} \quad U = 2V \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Finalement : $U = V\sqrt{3}$

Cette relation est toujours vraie quelque soit la charge.



5. Récepteurs triphasés équilibrés :

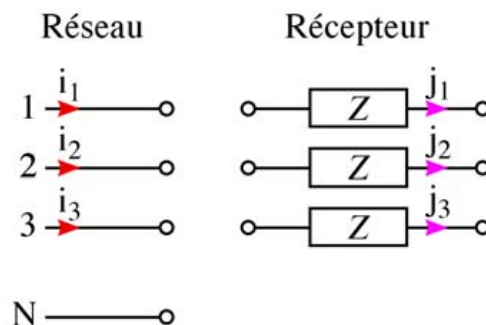
5.1 Définitions

Récepteurs triphasés : ce sont des récepteurs constitués de trois dipôles identiques, d'impédance Z .

Équilibré : car les trois éléments sont identiques.

Courants par phase : ce sont les courants qui traversent les éléments Z du récepteur triphasés. Ils sont symbolisés par J .

Courants en ligne : ce sont les courants qui passent dans les fils du réseau triphasé. Ils sont symbolisés par I .



Le réseau et le récepteur peuvent se relier de deux façons différentes : en étoile ou en triangle.

5.2 Théorème de Boucherot (rappel)

Les puissances active et réactive absorbées par un groupement de dipôles sont respectivement

égales à la somme des puissances actives et réactives absorbées par chaque élément du groupement, [10].

Donc d'après ce théorème :

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \text{ et } Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Pour un récepteur équilibré :

$$P_1 = P_2 = P_3 \text{ et } Q_1 = Q_2 = Q_3$$

Finalement :

$$P = 3.P_1 \text{ et } Q = 3.Q_1$$

Facteur de puissance :

$$k = P / S.$$

6. Couplage étoile :

6.1 Montage

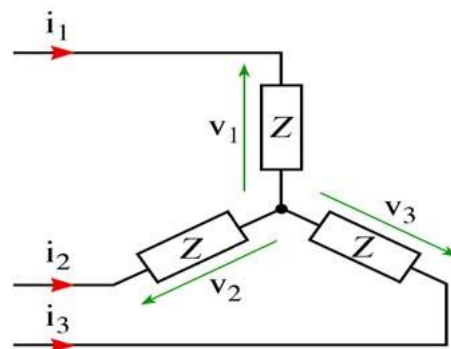
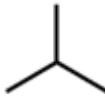


Figure 5: Couplage étoile

Même branchement représenté de deux façons différentes.

Le premier schéma explique le terme « étoile ». 

Comme il s'agit des mêmes impédances, de ce fait $i_1 + i_2 + i_3 = 0$, donc $i_n = 0$. Le courant dans le fil neutre est nul. Le fil neutre n'est donc pas nécessaire. Pour un système triphasé équilibré, le fil neutre ne sert à rien.

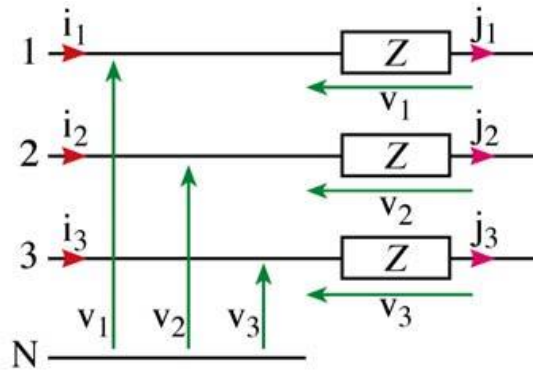


Figure 6: Courant de ligne et courant de phase.

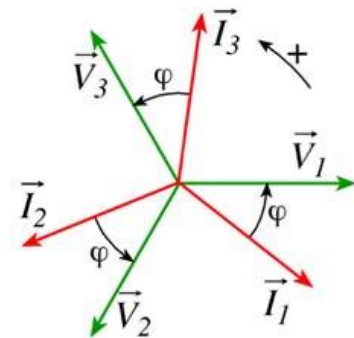
6.2 Relations entre les courants

On constate sur les schémas du paragraphe 6.1 que les courants en ligne sont égaux aux courants par phase $i_1 = j_1$; $i_2 = j_2$; $i_3 = j_3$

De plus la charge et le réseau sont équilibrés, donc :

$$I_1 = I_2 = I_3 = I = J$$

On retiendra pour le couplage étoile : $I = J$



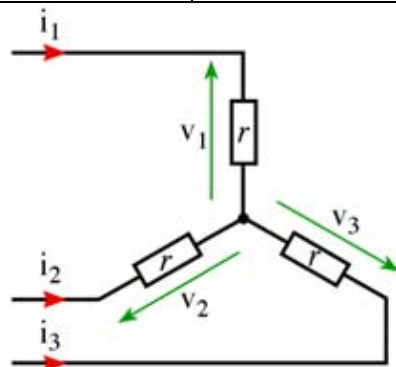
6.3 Puissances :

Pour une phase du récepteur :	$P_1 = VI \cos \varphi$	avec $\varphi(\vec{I}, \vec{V})$
Pour le récepteur complet :	$P = 3.P_1 = 3VI \cos \varphi$	de plus $V = \frac{U}{\sqrt{3}}$
Finalement pour le couplage étoile :	$P = \sqrt{3}UI \cos \varphi$	
de la même façon :	$Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi$	
et :	$S = \sqrt{3}UI$	
Facteur de puissance :	$k = \cos \varphi$	

6.4 Pertes par effet Joule :

Considérons que la partie résistive du récepteur.

Pour une phase du récepteur :	$P_{J_1} = rI^2$
Résistance vue entre deux bornes :	$R = 2r$
Pour le récepteur complet :	$P = 3.P_{J_1} = 3rI^2 = \frac{3}{2} RI^2$
Finalement pour le couplage étoile	$P = \frac{3}{2} RI^2$



7. Couplage triangle :

7.1 Montage

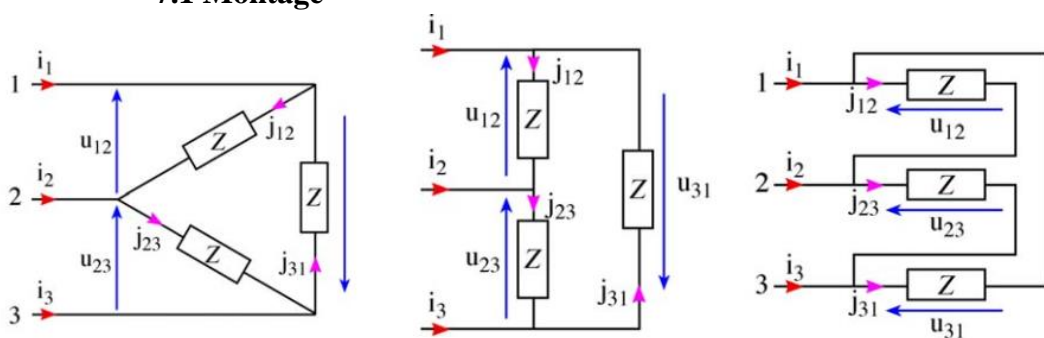



Figure 7: Couplage triangle.

Même branchement représenté de trois façons différentes. Le premier schéma explique le

terme « triangle ». 

Comme il s'agit des mêmes impédances, $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ et $j_{12} + j_{23} + j_{31} = 0$

Ici en aucun cas le fil neutre n'est nécessaire.

7.2 Relations entre les courants :

D'après les schémas du paragraphe 5.3.1.

$$i_1 = j_{12} - j_{31} \Rightarrow \vec{I}_1 = \vec{J}_{12} - \vec{J}_{31}$$

$$i_2 = j_{23} - j_{12} \Rightarrow \vec{I}_2 = \vec{J}_{23} - \vec{J}_{12}$$

$$i_3 = j_{31} - j_{23} \Rightarrow \vec{I}_3 = \vec{J}_{31} - \vec{J}_{23}$$

Le système triphasé est équilibré : $I_1 = I_2 = I_3 = I$ et $J_{12} = J_{23} = J_{31} = J$.

Pour le couplage triangle, la relation entre I et J est la même que la relation entre V et U.

Pour le couplage triangle : $J = \frac{I}{\sqrt{3}}$

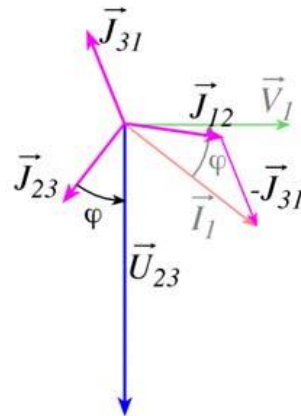
Remarque :

Les déphasages pour les deux montages étoile et triangle sont les mêmes. Il s'agit du

Z

déphasage provoqué par le dipôle du montage.

$$\varphi_{\Delta}(\vec{J}, \vec{U}) = \varphi_{\star}(\vec{I}, \vec{V})$$



7.3 Puissances :

Pour une phase du récepteur :

$$P_1 = UJ \cos \varphi$$

avec $\varphi(\vec{J}, \vec{U})$

Pour le récepteur complet :

$$P = 3.P_1 = 3UJ \cos \varphi$$

de plus $J = \frac{I}{\sqrt{3}}$

Finalement pour le couplage étoile $P = \sqrt{3}UI \cos \varphi$

De la même façon : $Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi$

et : $S = \sqrt{3}UI$

Facteur de puissance : $k = \cos \varphi$

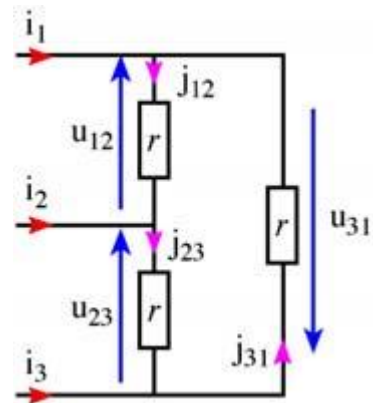
7.4 Pertes par effet Joule :

Considérons que la partie résistive du récepteur.

Détail du calcul de la résistance équivalente vue entre deux bornes du récepteur :

Nous avons $2r$ en parallèle avec r ;

$$R = \frac{2r \cdot r}{2r + r} = \frac{2}{3}r$$



Pour une phase du récepteur :	$P_{J1} = rJ^2$
Résistance vue entre deux bornes :	$R = \frac{2}{3}r$
Pour le récepteur complet :	$P = 3 \cdot P_{J1} = 3rJ^2 = 3 \frac{3}{2} R \left(\frac{I}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{3}{2} RI^2$
Finalement pour le couplage étoile :	$P = \frac{3}{2} RI^2$

Remarques

Quel que soit le couplage, les puissances s'expriment de la même façon en fonction

- de la tension composée U

- du courant en ligne I

Ces deux grandeurs sont les seules qui soient toujours mesurables quel que soit le couplage, même inconnu, du récepteur utilisé.

Lecture 220/380 V.

8. Mesure de puissance : le wattmètre

Le wattmètre permet de mesurer la puissance active P en monophasé ou triphasé. Il possède au moins quatre bornes : deux bornes pour mesurer la tension et deux bornes pour

mesurer le courant. Il y a donc deux branchement à réaliser : un branchement en parallèle (comme un voltmètre) pour mesurer la tension, et un branchement en série (comme un ampèremètre) pour mesurer le courant. Le wattmètre tient compte du déphasage.

5.1 Mesure en triphasé lorsque le fil neutre est accessible (ligne à quatre fils) :

Il n'est pas nécessaire de connaître le couplage du récepteur. Le wattmètre branché de cette façon mesure (puissance lue) : $P' = VI \cos\phi$

La puissance du récepteur s'exprime (puissance absorbée) :

$$P = \sqrt{3}UI \cos\phi$$

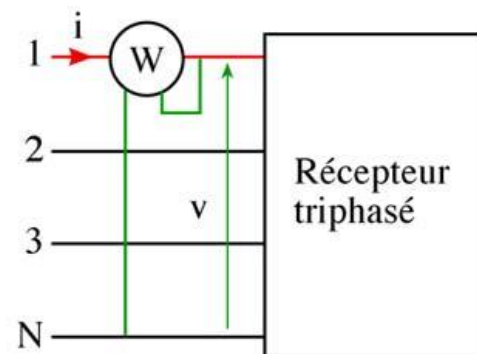


Figure 28: Mesure avec un wattmètre

La relation entre la puissance lue et la puissance absorbée par le récepteur est donc : $P = 3P'$.

Pour une charge quelconque on utilise 3 wattmètres comme montré sur la figure suivante :

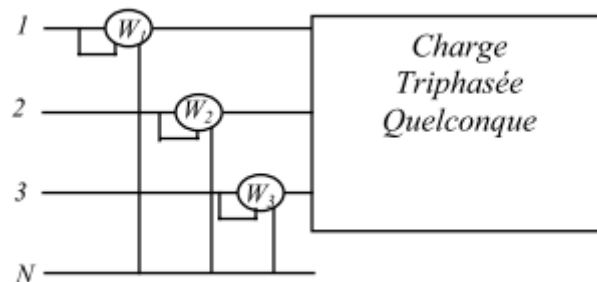


Figure 29: Mesure de puissance avec trois wattmètres.

Inconvénients :

Ce montage nécessite de présence du neutre (donc montage triangle exclu) et utilisation de 3 wattmètres.

Avantage :

Il fonctionne quelle que soit la charge.

5.2 Mesure de puissance active et réactive d'un montage quelconque (méthode générale) :

C'est une méthode très pratique et très classique qui permet de mesurer la puissance active et la puissance réactive dans tous les cas :

- La puissance transmise par une ligne triphasée (équilibrée ou non, avec des signaux sinusoïdaux ou non)
- Le récepteur est équilibré (courant qui le traverse est nul : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$), [15].

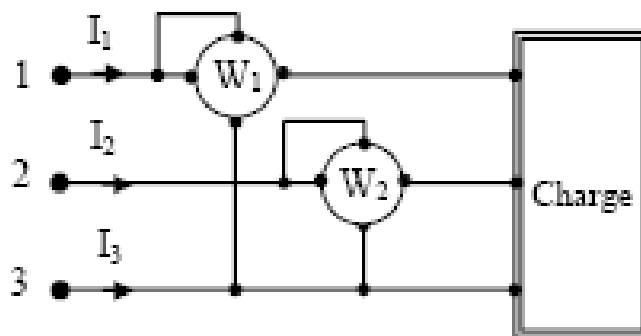




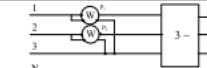
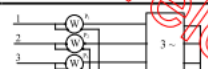
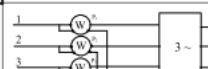
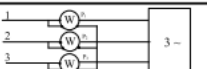
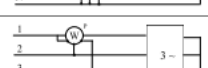
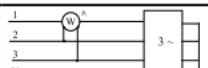


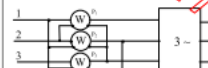
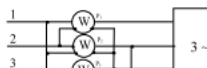
Figure 3: Méthode des deux Wattmètres (méthode générale)

$$P = W_1 + W_2$$

$$Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2)$$

Avantage : ne nécessite que 2 wattmètres ou un seul wattmètre avec un commutateur

Le tableau ci-dessous récapitule les différentes techniques de mesure des différentes puissances, pour différents montage, [17].

Circuit Méthode	EQUILIBRE		DESEQUILIBRE	
	Couplage Etoile avec neutre artificiel	Couplage Triangle ou étoile	Couplage Etoile avec neutre artificiel	Couplage Triangle ou étoile
PUISSANCE ACTIVE (P)	1 Wattmètre $P = 3 \cdot P_1$	 Neutre artificiel avec R additionnelles	Pas de montage	Pas de montage
	2 Wattmètres $P = P_1 + P_2$		Pas de montage	
	3 Wattmètres $P = P_1 + P_2 + P_3$	 Neutre artificiel : 3 bobines des wattmètres	 Neutre artificiel : 3 bobines des wattmètres	
	1 Wattmètre triphasé P : Puissance lue		Pas de montage	Pas de montage
PUISSANCE REACTIVE (Q)	1 Wattmètre $Q = \sqrt{3} \cdot P_1$		Pas de montage	Pas de montage
	2 Wattmètres $Q = \sqrt{3} (P_1 - P_2)$			Pas de montage
	3 Wattmètres $Q = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{\sqrt{3}}$	Pas de montage		

9. Relèvement du facteur de puissance en triphasé

9.1 Couplage des condensateurs en triangle

Tension aux bornes d'un condensateur : U

Puissance

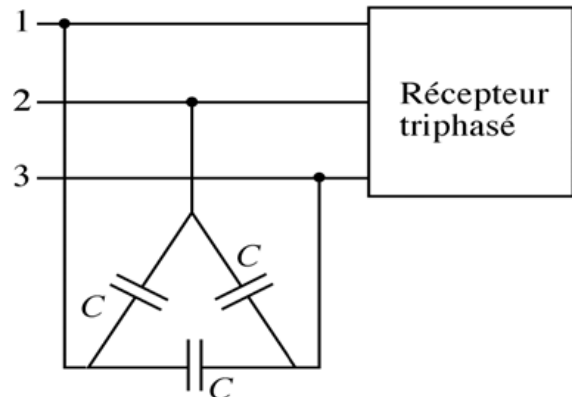
réactive

$$Q_{C1} = -C\omega U^2$$

absorbée par un condensateur :

Puissance réactive absorbée par les trois condensateurs :

$$Q_C = 3Q_{C1} = -3C\omega U^2$$



9.2 Couplage des condensateurs en étoile

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on montre que la capacité du condensateur est donnée par la relation :

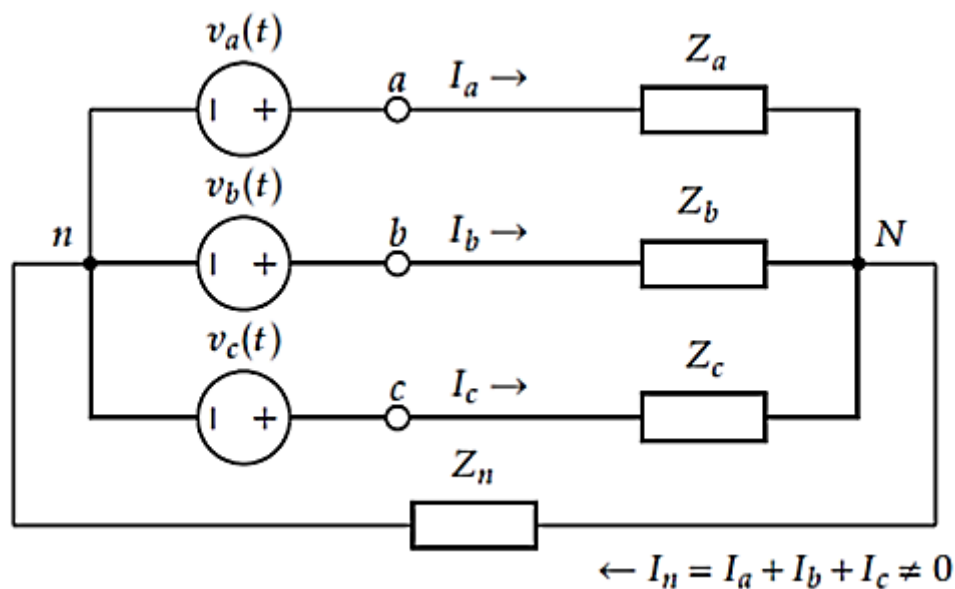
$$C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{\omega U^2}$$

Le couplage en étoile est donc moins intéressant puisque la capacité des condensateurs nécessaires est trois fois plus grande que pour le couplage en triangle. Plus la capacité est grande, plus le condensateur est volumineux et onéreux.

10. Systèmes triphasés déséquilibré (composantes symétriques) :

On dit d'un système triphasé qu'il est déséquilibré si toutes les grandeurs électriques analogues ne sont pas égales d'une phase sur l'autre. Il existe trois types de circuits triphasés déséquilibrés :

- Source déséquilibrée : Court-circuit à la source ou dans un transformateur.
- Charge déséquilibrée : Il peut exister un court-circuit dans la charge, ou une mauvaise répartition des charges monophasées sur le réseau 3φ
- Combinaison de source et charge déséquilibrées.



De façon pratique on retrouve des charges déséquilibrées plus souvent que des sources déséquilibrées. On conçoit les sources pour qu'elles soient les plus équilibrées possibles. On peut utiliser l'une de deux méthodes d'étude pour résoudre ces circuits:

1. Utilisation des lois relatives aux circuits électriques (mailles, nœuds, etc..)
2. Méthodes des composantes symétriques.

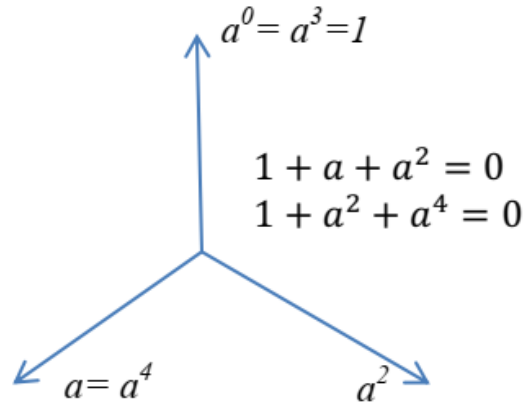
- La méthode des composantes symétriques :

Notions générales

Soit trois grandeurs représentées par trois $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$. vecteurs. A partir de ces

trois vecteurs on définit trois autres vecteurs selon les formules :

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_0 &= \frac{\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3}{3} \\ \bar{V}_d &= \frac{\bar{V}_1 + a \bar{V}_2 + a^2 \bar{V}_3}{3} \\ \bar{V}_i &= \frac{\bar{V}_1 a^2 + \bar{V}_2 + a \bar{V}_3}{3} \end{aligned} \right\} \dots \dots 1$$



$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad \text{Opérateur de rotation du système triphasé où}$$

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}}, \quad a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}}, \quad a^0 = a^3 = 1$$

A partir de $\bar{V}_0, \bar{V}_d, \bar{V}_i$ on peut reproduire $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$

$$\bar{V}_0 + \bar{V}_d + \bar{V}_i = \bar{V}_1 + \frac{\bar{V}_2}{3}(1 + a + a^2) + \bar{V}_3(1 + a + a^2)$$

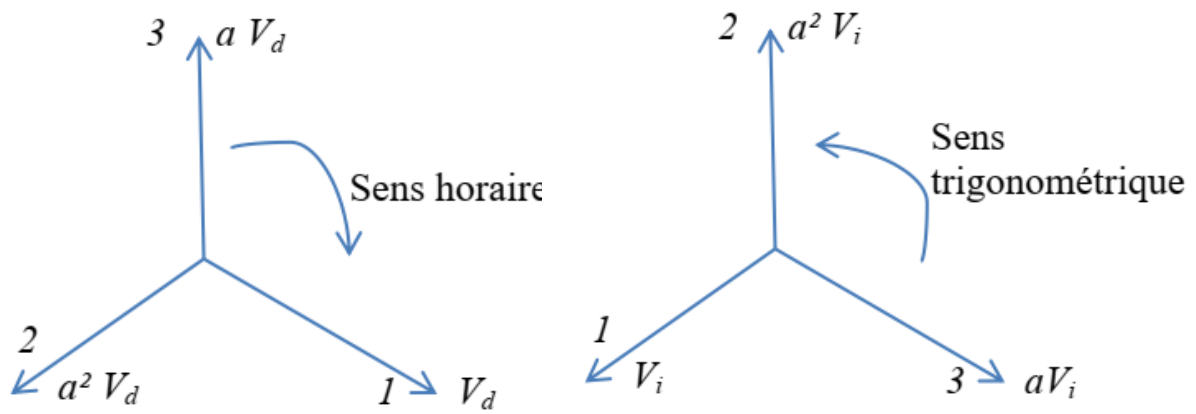
$$\bar{V}_0 + a^2 \bar{V}_d + a \bar{V}_i = \frac{\bar{V}_1}{3}(1 + a + a^2) + \frac{\bar{V}_2}{3}(1 + a^3 + a^3) + \frac{\bar{V}_3}{3}(1 + a^2 + a^4)$$

$$\bar{V}_0 + a \bar{V}_d + a^2 \bar{V}_i = \frac{\bar{V}_1}{3}(1 + a + a^2) + \frac{\bar{V}_2}{3}(1 + a^2 + a^4) + \frac{\bar{V}_3}{3}(1 + a^3 + a^3)$$

$1 + a + a^2 = 1 + a^2 + a^4 = 0$ et $1 + a^3 + a^3 = 3$ on aura alors :

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bar{V}_0 + \bar{V}_d + \bar{V}_i \\ \bar{V}_2 &= \bar{V}_0 + a^2 \bar{V}_d + a \bar{V}_i \\ \bar{V}_3 &= \bar{V}_0 + a \bar{V}_d + a^2 \bar{V}_i \end{aligned} \right\} \dots \dots 2$$

Dans le système d'équation 2: Les premiers vecteurs forment un système triphasé **homopolaire** \bar{V}_0



- Les trois deuxièmes vecteurs $\bar{V}_d, a \bar{V}_d, a^2 \bar{V}_d$ forment un **système triphasé direct**
- Les trois troisièmes vecteurs $\bar{V}_i, a \bar{V}_i, a^2 \bar{V}_i$ forment un **système triphasé inverse**

Les trois vecteurs $\bar{V}_0 + \bar{V}_d + \bar{V}_i$, dont la composition reproduit $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$

sont appelés composantes symétriques du système $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$

Tout système triphasé peut être décomposé en 3 systèmes :

Un système triphasé homopolaire \bar{V}_0

Un système triphasé symétrique direct \bar{V}_d

Un système triphasé symétrique inverse \bar{V}_i

11. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence la nécessité de l'étude des réseaux triphasés. Ensuite, nous avons donné les caractéristiques essentielles de ces réseaux dans le cas équilibré et déséquilibré. Ensuite, les montages permettant de mesurer les différentes puissances sont présentés tout en précisant les avantages et les inconvénients de chacune d'elles. Pour compléter cette étude, nous avons exposé la technique de l'amélioration du facteur de puissance en utilisant les batteries de condensateurs.

CHAPITRE 4

Circuits Magnétiques

1. Introduction

Le principe de fonctionnement des machines électriques est basé sur l'interaction entre le champ électromagnétique et les matériaux électrotechniques. D'autre part, les performances associées au champ magnétique sont considérablement accrues par l'utilisation de matériaux magnétiques mis en œuvre dans des structures appelées **circuits magnétiques**. Ces circuits peuvent être fabriqués à base de matériaux ferromagnétiques, ferrimagnétique....

2. Corps ferromagnétiques :

Corps cristallins pouvant être aimantés sont usinés à base du Fer, Nickel et le Cobalt et leurs alliages. L'aimantation peut être grande et reste permanente en l'absence de champ extérieur.

3. Excitation ou champ magnétique

Le champ magnétique H (A/ m) est créé dans le vide par toute charge électrique en mouvement (**courant électrique**) ou par un **aimant permanent**. Le champ magnétique H ne dépend que de la source.

4. Induction magnétique

En présence de matière, le champ induit dans cette matière une **polarisation magnétique J** (une orientation et une agitation des molécules ou des atomes de la matière) dont les effets s'ajoutent à ceux de H et on est conduit à définir un nouveau vecteur, **l'induction magnétique**.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

L'induction magnétique B dépend de la source et du point de mesure.

Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ H.m⁻¹.

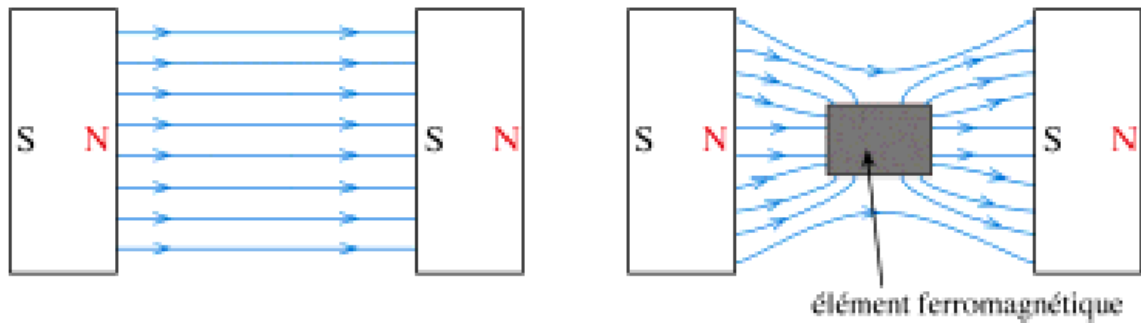
Perméabilité relative (par rapport au vide) : μ_r (sans dimension - μ_r peut varier en fonction des paramètres telle que la température).

Perméabilité : $\mu = \mu_0.\mu_r$ (H.m-1).

La perméabilité est la faculté que possède un matériau à canaliser le champ magnétique, c'est à dire à concentrer les lignes de champ du spectre magnétique ou à augmenter la valeur de l'induction magnétique.

5. Champ magnétique en présence du matériau magnétique :

Un champ magnétique uniforme est créé à l'aide de deux aimants. En présence d'un élément ferromagnétique les lignes de champ se concentrent pour passer à travers le milieu ferromagnétique.

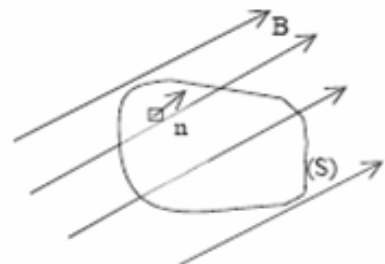


Explication : sous l'effet de B , le corps ferromagnétique subit une aimantation et crée un champ magnétique qui s'ajoute au premier. Le champ total est donc plus intense autour du corps ferromagnétique.

6. Flux magnétique

Le flux magnétique ϕ de vecteur d'induction \vec{B} à travers une surface fermée (S) est définie par:

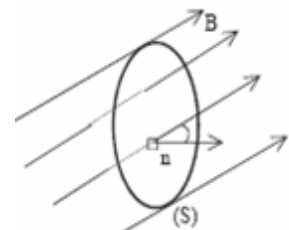
$$\phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$



6.1 Cas d'une spire inclinée :

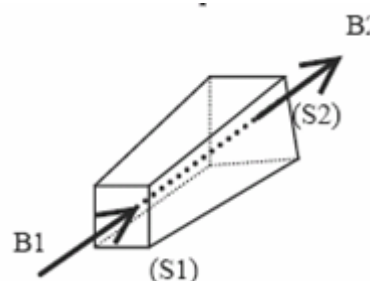
On supposera le champ d'induction constant au travers de la spire S . on appellera α l'angle entre la normale à la spire et le champ B :

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{(S)} B \cos(\alpha) \, dS = B \cos(\alpha) \iint_{(S)} dS \\ \phi &= BS \cos(\alpha) \end{aligned}$$



6.2 Conservation du flux :

Le flux magnétique est conservé suivant au sein d'un tube de champ.



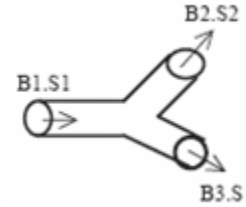
$$\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2}$$

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1 = \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_2$$

On peut généraliser ce principe en disant qu'au sein d'un volume fermé, le flux entrant est égale au flux sortant.

En appliquant la loi de conservation du flux, on a:

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1 = \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_2 + \vec{B}_3 \cdot \vec{S}_3$$

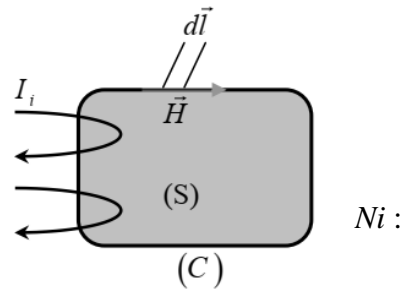


7. Théorème d'ampère

La simplification du théorème d'ampère donne la relation reliant le champ magnétique au courant excitateur.

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n N_i I_i$$

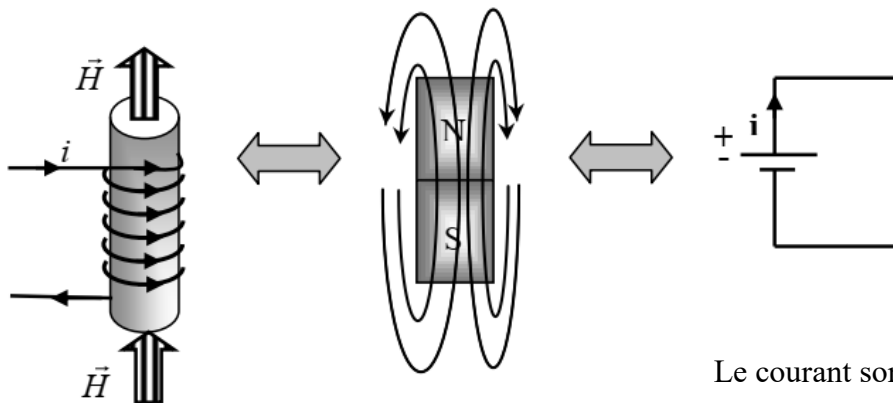
I_i : Les courant qui traversent (S).
 Nombre de tours du conducteur i .



La circulation du vecteur \vec{H} le long d'une courbe fermée (C) quelconque est égale à la somme algébrique des courants traversant la surface s'appuyant sur le contour (C). Le courant sera pris positivement s'il est dans le sens de la normale à la surface, et négativement s'il est dans le sens contraire de la normale à la surface.

8. Notions incontournables et théorème d'Ampère

Dés lors qu'un courant électrique traverse un bobinage, il crée un champ magnétique dont l'orientation est liée au sens du courant. L'orientation de ce champ dépend aussi du parcours du courant.



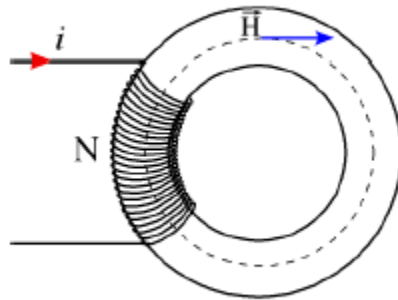
Les lignes de champ magnétique (flux) sortent du pôle nord et rentrent du pôle sud

Le courant sort de la borne positive et rentrent de la borne négative

9. Circuit magnétiques homogènes linéaires, relation d'Hopkinson et reluctance :

Les circuits magnétiques homogènes linéaires sont réalisés à partir d'un seul type de matériau magnétique, en respectant une géométrie à section constante et en dehors du domaine de saturation (c'est-à-dire que le courant d'excitation est suffisamment faible pour que l'induction magnétique dans le matériau n'atteigne pas B_{sat}), [18]

D'après le théorème
 $H.L = N.I$



d'Ampère

L : longueur moyenne des lignes de champ(m)

N : nombre de spires de la bobine

I : courant dans la bobine (A)

H : excitation magnétique (A/m)

Le matériau est homogène et hors saturation, il présente une perméabilité constante :

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

Ainsi :
$$B = \mu H = \mu \frac{NI}{l}$$

Enfin l'expression du flux de cette induction Φ , s'écrit à partir de :

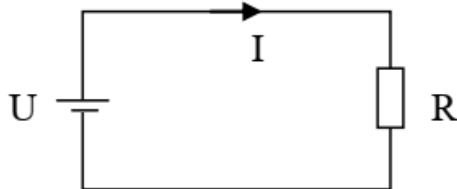
$$\Phi = BS = \mu \frac{NI}{l} S = \frac{\mu S}{l} NI$$

La formule obtenue s'appelle la relation d'Hopkinson, il est possible d'y faire apparaître une grandeur ne dépendant que des caractéristiques fixes du circuit : $\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S}$, appelée **la reluctance**.

En résumé : $NI = \Phi \mathfrak{R}$

10. Analogie avec les circuits électriques

Le circuit magnétique peut être représenté par un circuit électrique équivalent, [8].

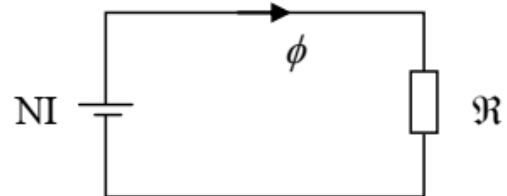


U : force électromotrice FEM (V)

- R : résistance (Ω)
- I : Courant électrique
- Loi d'Ohm : $U=RI$
- Association de résistances

En série : $R = \sum_{i=1}^n R_i$

En parallèle : $1/R = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$



- NI : force magnétomotrice FMM (A.t)
- \mathfrak{R} : réluctance (H^{-1}) Henrys⁻¹
- flux magnétique ϕ Wb
- Loi d'Opkinson : $\varepsilon=\mathfrak{R}\phi= NI$.
- Association des réluctances

En série : $\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^n \mathfrak{R}_i$

En parallèle : $1/\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathfrak{R}_i}$

11. Courbe de première aimantation, cycle d'hystérésis

Ces courbes montrent comment un corps ferromagnétique réagit à l'excitation magnétique H. La courbe de première aimantation est celle de $B = f(H)$ lorsque le corps ferromagnétique ne possède aucune aimantation (Figure 4.1). Etant donné que le cycle d'hystérésis est la courbe $B = f(H)$ lorsque le corps ferromagnétique possède déjà une aimantation.

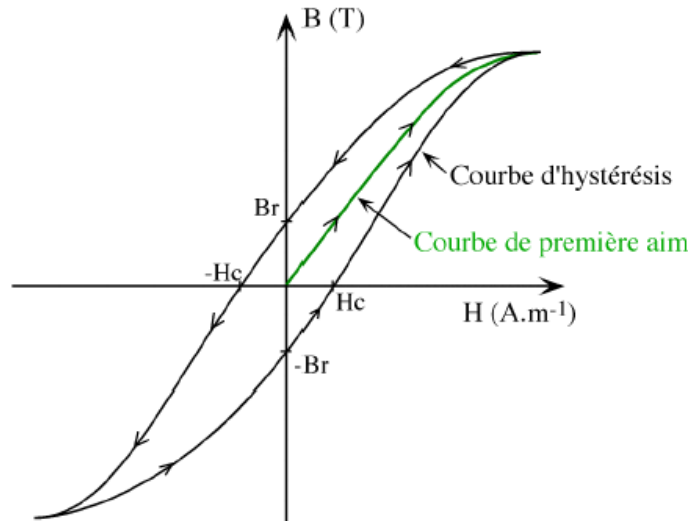


Figure 4.1: Cycle d'hystérésis d'un matériau magnétique.

En pratique, le cycle d'hystérésis peut être tracé en utilisant le montage suivant:

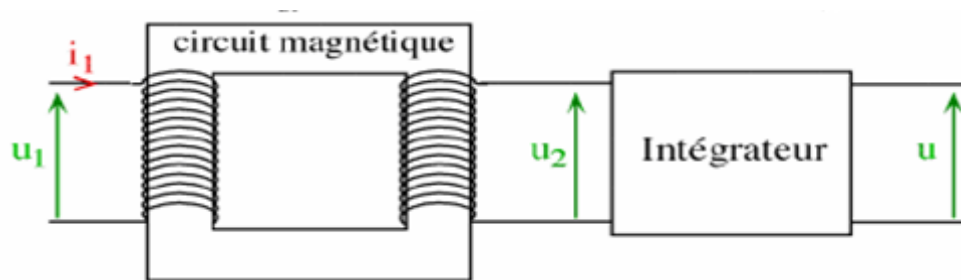


Figure 4.2: Montage de mesure du cycle d'hystérésis d'un matériau magnétique

La tension u_1 crée un flux magnétique canalisé par le circuit magnétique qui traverse donc le secondaire du transformateur.

$$H = \frac{N_1 i_1}{l}, u_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \text{ et } u_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = BS, u_2 = -N_2 S \frac{dB}{dt} \text{ enfin : } B = \frac{-1}{N_2 S} \int u_2 dt$$

En mesurant i_1 , nous pouvons connaître H et en mesurant u , nous **pouvons** connaître B .

- **Zone linéaire** : dans cette zone, $B = \mu.H$ avec μ constante. C'est cette zone qui est généralement exploitée pour les transformateurs et les machines tournantes.
- **Saturation du milieu ferromagnétique** : lorsque H devient trop grand, B ne varie presque plus. Le matériau magnétique est dit saturé. On a toujours $B = \mu.H$, mais μ n'est plus constant.

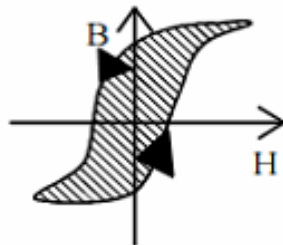
- **Champ rémanent B_r** : champ qui subsiste lorsque $H = 0$ ($i_1 = 0$).
- **Excitation coercitive H_c** : excitation H nécessaire pour annuler le champ rémanent B_r .
- **Hystérésis** : c'est le dédoublement de la caractéristique $B(H)$ du matériau magnétique. Donc B dépend non seulement de H , mais aussi de l'aimantation antérieure. Les substances ferromagnétiques sont douées de mémoire.

Remarque : hystérésis = retard en grec - retard à la désaimantation.

12. Pertes

a) Pertes par hystérésis

Ce type de perte est lié au cycle d'hystérésis du matériau. Le parcours du cycle $B(H)$ fait apparaître une perte d'énergie qui correspond alors à un échauffement de la matière. Elles sont donc proportionnelles à la fréquence et sont liées à la structure du matériau.



$$P_h = \alpha B_m^2 f^2$$

Dans le cadre de transformateur, on utilise des matériaux doux pour cette simple raison.

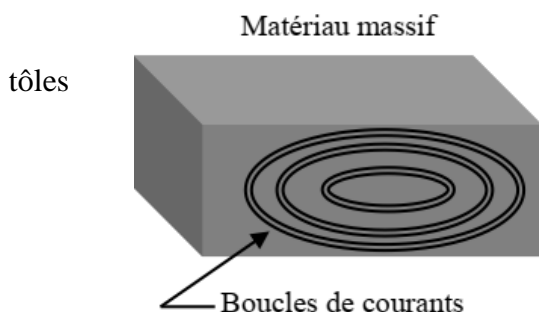
b) Pertes par courants de Foucault

La variation du champ magnétique dans la matière génère par induction des courants induits qui se rebouclent sur eux mêmes. Il y a donc échauffement par effet joule. Cette fois-ci ces pertes sont proportionnelles au carré de la fréquence.

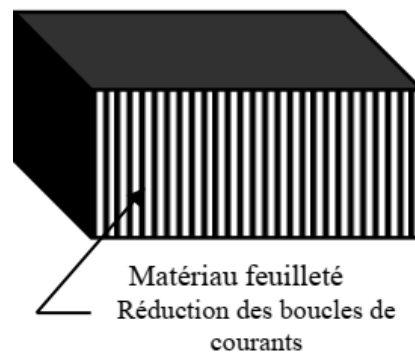
$$P_f = \beta B_m^2 f^2$$

Afin de les limiter, on cherche à réduire le parcours des courants induits, c'est pour cette raison que l'on utilise des circuits magnétiques feuilletés isolés. Afin de minimiser ces pertes, il existe deux possibilités qui sont en général conjuguées : Tout d'abord utiliser comme matériau de l'acier au silicium, ce dernier ne modifie presque pas les propriétés magnétiques du noyau tout en augmentant considérablement sa résistivité. Dans les applications en régime

alternatif, remplacer les volumes massifs de matériau magnétique par des empilements de d'acier isolées entre elles permet de réduire les



perles par courants de Foucault. La figure ci-contre représente le noyau feuilleté et les nouveaux trajets, considérablement réduits sur l'épaisseur d'une tôle).



c) Pertes fer

L'appellation pertes fer représente la totalité des pertes énoncées, qui sont physiquement indissociables, à savoir : les pertes par hystérésis et les pertes par courants de Foucault. On tiendra ainsi : $P_{\text{fer}} = P_h + P_f$

13. Modèle linéaire d'une bobine à noyau de Fer

On appelle bobine à noyau de fer tout circuit magnétique bobiné utilisé en régime alternatif, le plus souvent sinusoïdal (Figure 4.3)

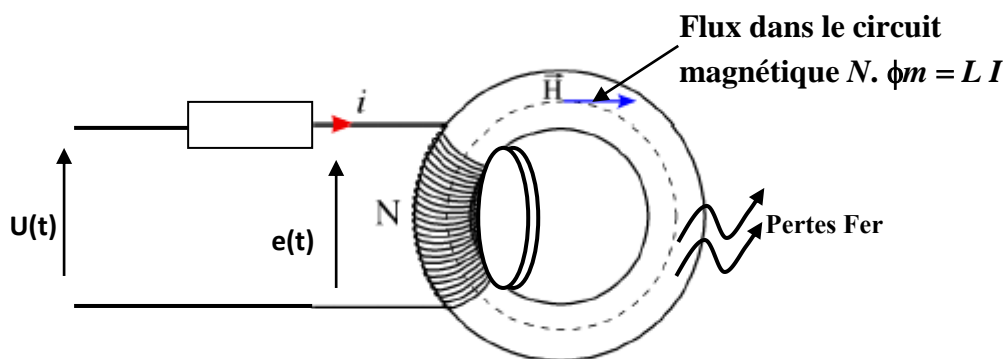


Figure 4.3: Flux magnétique dans une bobine à noyau de fer

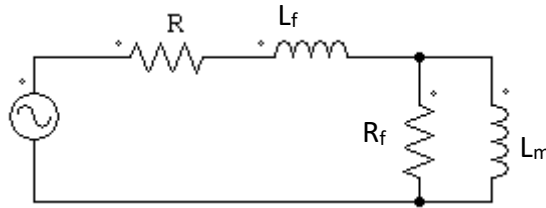
Le flux traversant le bobinage est : $\Phi = \Phi_m + \Phi_f$

$$e(t) = N \frac{d\phi}{dt} = N \frac{d\phi_m}{dt} + N \frac{d\phi_f}{dt} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \frac{di}{dt} + \frac{N^2}{\mathfrak{R}_f} \frac{di}{dt}$$

$$L_m = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} L_f = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_f}$$

L_m : est l'inductance de magnétisation en série avec L_f l'inductance de fuite.

Par ailleurs, on montre que les pertes fer sont quasiment proportionnelles au carré de la valeur efficace de la force électromotrice $e(t) = L_m \frac{di}{dt}$. Ces pertes sont alors représentées classiquement par une résistance R_f en parallèle avec une inductance magnétisante L_m



14. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné les notions fondamentales sur les circuits magnétiques à savoir le rôle, les différentes pertes ainsi que le schéma électrique équivalent d'un circuit magnétique en régime alternatif. Nous rappelons que les inductances, transformateurs, alternateurs, machines asynchrones, etc., sont basés sur l'utilisation de circuits magnétiques, c'est-à-dire de masses de matériaux dits "magnétiques" propres à canaliser les lignes de champs et à développer de fortes valeurs d'induction, [8]. En effet, dans le prochain chapitre nous entamons l'étude des transformateurs monophasés qui sont construits principalement par bobinage primaire et secondaire liés magnétiquement par un circuit magnétique.

CHAPITRE 5

Les Transformateurs

I Introduction

Un transformateur est une machine électrique statique permettant un changement de tension

alternative avec un excellent rendement. Il peut être utilisé en abaisseur de tension (alimentation des appareils) ou en élévateur de tension (transport de l'énergie électrique).

Dans ce chapitre, nous allons donner un aperçu sur le transformateur monophasé idéal et le transformateur monophasé réel. D'autre part, nous présenterons brièvement les autres types de transformateurs (isolement, à impulsion, autotransformateur et transformateurs triphasés).

Symboles :

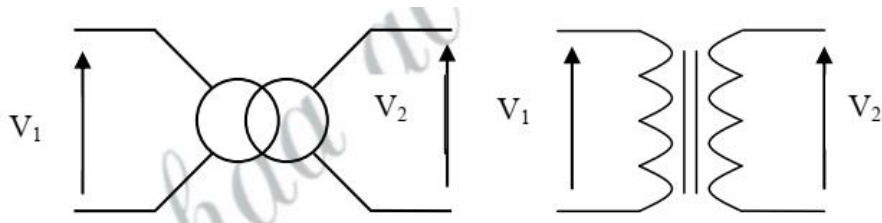


Figure 5.1 Symboles du transformateur.

II Principe – Équations :

a) Constitution – Principe :

Un transformateur comprend :

- Un circuit magnétique fermé :
 - ✓ de perméabilité magnétique aussi haute que possible afin de faciliter le plus possible le passage des lignes de champ magnétique ;
 - ✓ d'hystérésis aussi faible que possible pour limiter les pertes ;
 - ✓ feuilleté (tôles de 0,2 à 0,3 mm d'épaisseur) afin de limiter les courants de Foucault et de résistance électrique aussi élevée que possible, toujours dans le but d'affaiblir les courants de Foucault, à cette fin on utilise des aciers au silicium (2 à 3 %).
- Deux enroulements (bobines) :
 - ✓ Le primaire alimenté par un générateur de tension alternative de tension u_1 et comportant N_1 spires. Il absorbe le courant I_1 . Le primaire transforme l'énergie électrocinétique reçue en énergie magnétique. C'est un récepteur d'énergie électrique qui transforme cette énergie en énergie magnétique ;

- ✓ Le secondaire comporte N_2 spires ; il fournit, sous la tension u_2 , un courant I_2 au dipôle récepteur. Le secondaire transforme l'énergie magnétique reçue du primaire en énergie électrocinétique. C'est un générateur d'énergie électrique. Les deux enroulements sont isolés électriquement, mais magnétiquement couplés par le flux.

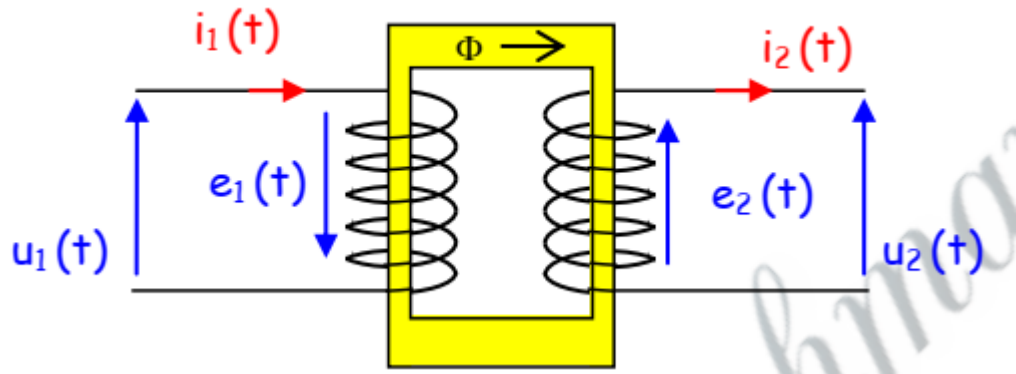


Figure 5.2 transformateur monophasé

b) Transformateur monophasé parfait :

Un transformateur parfait :

- pas de fuite magnétique, dans ce cas la reluctance du noyau sera nulle (la perméabilité est infinie).*
- Pas de pertes Joule ($r_1=r_2=0$).
- Enroulement sont fuite magnétique.

Le circuit équivalent du transformateur idéal est donc :

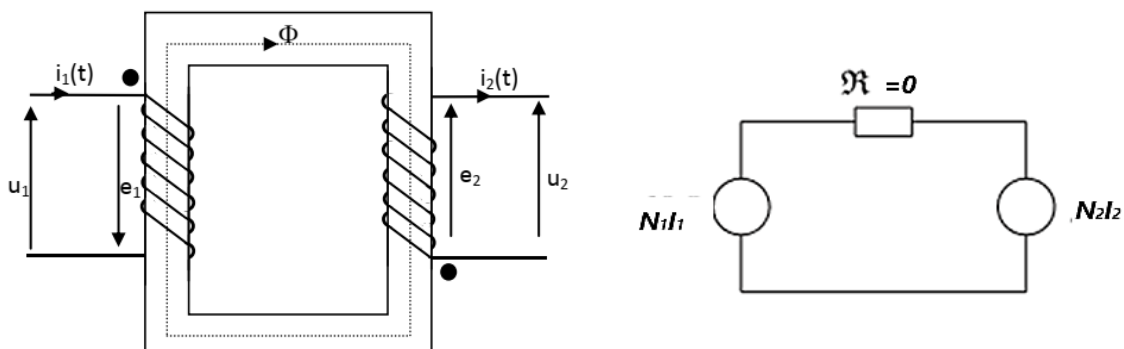


Figure 5.3 transformateur monophasé parfait

En appliquant théorème d'Ampère : $\int H dl = NI$

$N_1 I_1 + N_2 I_2 = \mathfrak{R} \phi$ on sait par hypothèse que $\mathfrak{R} = 0$

Une variation de flux à travers une spire crée une force électromotrice e . Inversement, une force électromotrice dans une spire crée une variation de flux à travers celle-ci, [19].loi de Faraday.

Loi de Faraday :

Toute variation de flux à travers un circuit électrique fermé donne naissance à un courant induit, l'existence du courant coïncide avec celle de la variation de flux, si le circuit est ouvert, il y a force électromotrice induite,

Loi de Lenz :

Le courant induit est tel que par ses effets s'oppose à la cause qui lui a donné naissance :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Pour un transformateur parfait, l'enroulement du primaire, formé de N_1 spires, est le siège d'une f.é.m.:

$$e_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt} \text{ et } u_1 = -e_1$$

u_1 est sinusoïdale. Posons $u_1 = U_1\sqrt{2}\cos(\omega t)$

$$\text{d'où : } \frac{d\phi}{dt} = \frac{U_1\sqrt{2}}{N_1} \cos(\omega t) \text{ et } \phi = \frac{U_1\sqrt{2}}{N_1\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Le flux étant défini par la relation $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$, \vec{B} est le champ magnétique à travers les spires et \vec{S} la section (supposée constantes) du circuit magnétique. En effet, quelque soit le transformateur, il n'y a aucun contact électrique entre le circuit primaire et le circuit secondaire.

$$\text{Soit : } B = \frac{U_1\sqrt{2}}{N_1 S \omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Posons :

$$\hat{B} = \frac{U_1\sqrt{2}}{N_1 S \omega} \text{ la valeur maximum du champ magnétique } B .$$

Comme $\omega = 2\pi f$ nous obtenons l'expression de la valeur efficace U_1 .

$$U_1 = 4.44 N_1 f S B \text{ c'est la formule de Boucherot.}$$

Pour un transformateur parfait tout le flux créé par l'enroulement primaire traverse l'enroulement secondaire, [20]

$$u_1 = -e_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}, u_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt} = e_2$$

Soit :

$$\frac{u_2}{u_1} = -\frac{e_2}{e_1} = -\frac{N_2}{N_1} = -m$$

Le transformateur sera considéré comme parfait pour les courants, ainsi pour tous courants non nuls, la relation entre les valeurs efficaces I_1 et I_2 s'exprime ainsi :

$$\frac{u_2}{u_1} = -\frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2} = -m$$

Ou encore:

$$u_2 = -mu_1$$

m est le rapport de transformation. Les tensions u_1 et u_2 sont en opposition de phase.

Les valeurs efficaces des tensions sont liées par la relation suivante:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

c) . Diagramme de Fresnel

Un transformateur parfait est alimenté au primaire par une tension sinusoïdale $u_1(t)$. Il alimente une charge Z_c , telle que le courant $i_2(t)$ présente un déphasage d'un angle φ_2 avec la tension $u_2(t)$.

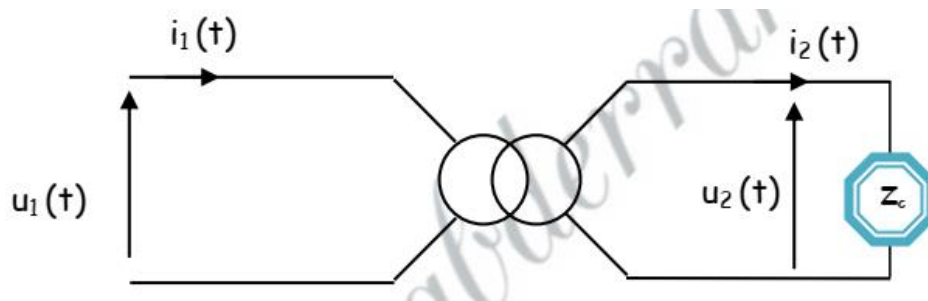


Figure 5.4 Schéma équivalent d'un transformateur parfait

Il est possible d'évaluer l'intensité $i_1(t)$ du courant appelé au primaire à l'aide d'un diagramme de Fresnel. Ce courant dépend de la charge appliquée au secondaire.

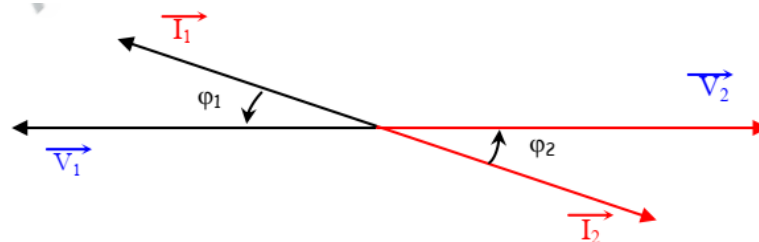


Figure 5.5 Diagramme de Fresnel

La valeur de l'intensité efficace du courant I_2 dépend de la charge appliquée au secondaire, il en est de même pour le facteur de puissance $\cos \varphi_2$. Ces deux grandeurs

imposent la valeur de l'intensité efficace du courant I_1 appelé au primaire, ainsi que le facteur de puissance du primaire, sachant que $\varphi_1 = \varphi_2$.

d) Modèle du transformateur réel :

1. Schéma électrique équivalent à vide :

Le transformateur monophasé réel est équivalent à vide ($I_2=0$) à une bobine à noyau ferromagnétique et peut donc se modéliser par le même schéma électrique :

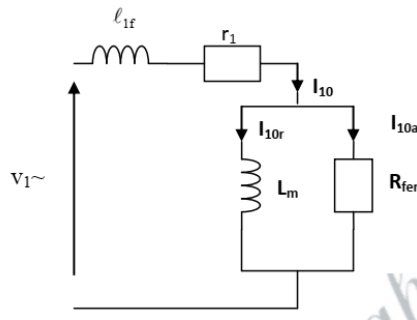


Figure 5.6 transformateur à vide

Détermination de R_{fer} et de L_m : on mesure V_1 , I_{10} et P_{10} :

En négligeant l'influence la chute de tension aux bornes de ℓ_{1f} et r_1 , on a : $R_{fer} = \frac{V_1^2}{P_{10}}$ et $L_m \omega = \frac{V_1}{I_{10r}}$ avec $I_{10r} = \sqrt{I_{10}^2 - I_{10a}^2}$ et $I_{10a} = \frac{V_1}{R_{fer}}$ $P_{10} = V_1 I_{10} \cos \varphi_{10}$

Important

- en réalité, le courant I_{10} n'est pas sinusoïdal (circuit magnétique non linéaire)
- il apparaît au secondaire du transformateur une tension V_{20} telle que :

$$\frac{V_{20}}{V_1} = m$$

2. Schéma électrique équivalent en charge

Théorème d'Ampère :

A vide : $\mathcal{R}\Phi_0 = N_1 I_{10}$

En charge : $\mathcal{R}\Phi_{ch} = N_1 I_1 + N_2 I_2$

Or $\Phi_0 = \Phi_{ch}$ car le flux est forcé par la valeur efficace de V_1 :

$V_1 \approx E_1 = 4,44 \cdot N_1 \cdot f \cdot \widehat{\Phi}$ (formule de boucherot)

D'où : $N_1 I_{10} = N_1 I_1 + N_2 I_2 \Leftrightarrow N_1 I_1 = N_1 I_{10} - N_2 I_2$ soit $I_1 = I_{10} - m I_2$

L'augmentation des Ampères-tours au primaire compense les Ampères-tours appelés au secondaire. Le courant $m \times I_2$ correspond au courant appelé au primaire par un

transformateur parfait débitant au secondaire un courant I_2 ; on en déduit le schéma équivalent au transformateur réel :

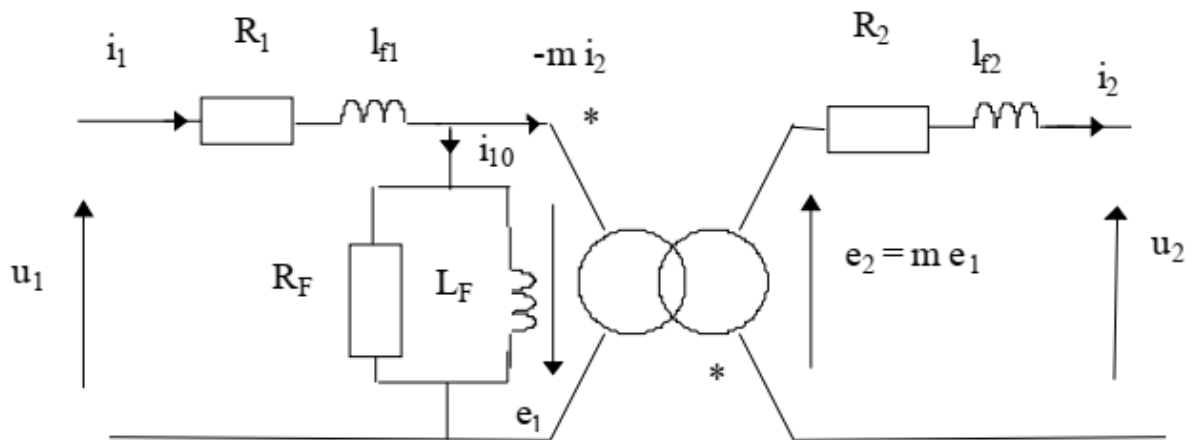


Figure 5.7 transformateur réel en charge

3. Modèle de Kapp :

L'approximation de Kapp consiste à négliger le courant I_{10} devant I_1 lorsque le transformateur fonctionne en charge. Vu du secondaire, le transformateur est alors équivalent à une f.e.m. (E_s) en série avec une impédance (Z_s) :

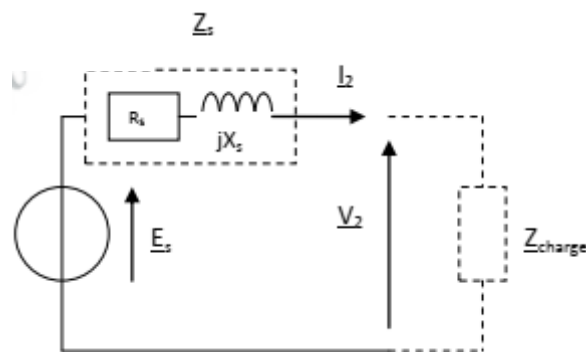


Figure 5.8 schéma équivalent ramène au secondaire.

$$\text{Avec } \overline{E_s} = -m\overline{V_1} = \overline{V_{20}}$$

$$\overline{Z_s} = R_s + jX_s$$

$$R_s = m^2 r_1 + r_2$$

$$X_s = (m^2 l_{1f} + l_{2f})\omega$$

Remarque :

- Les grandeurs du primaire sont multipliées par m^2 lorsqu'elles sont rapportées au secondaire

- Les grandeurs du secondaire sont divisées par m^2 lorsqu'elles sont rapportées au primaire

- **Détermination des éléments du modèle :**

✚ **Essai à vide ($i_2=0$)** sous tension primaire nominale:

On mesure V_1 et $V_{20}=E_s$, on en déduit :

$$m = \frac{V_{20}}{V_1}$$

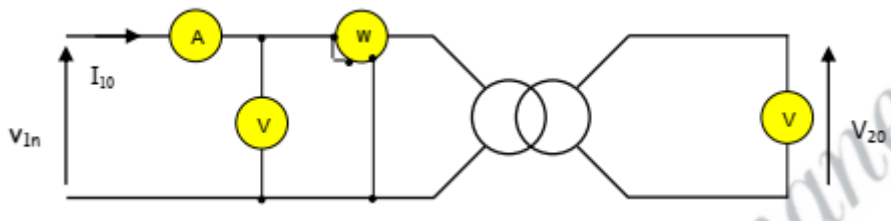


Figure 3.9 Essai à vide d'un transformateur monophasé.

La puissance $P_{10}=R_1I_{10}^2+P_{mag}$ avec $R_1I_{10}^2$ négligeable devant P_{mag}

✚ **Essai en court-circuit ($V_2=0$)** sous tension primaire réduite pour obtenir $I_{2cc}=I_{2N}$:

On mesure V_{1cc} , I_{2cc} ou I_{1cc} et P_{1cc} , on en déduit $Z_s = \frac{E_{scc}}{I_{2cc}} = \frac{mV_{1cc}}{I_{2cc}}$

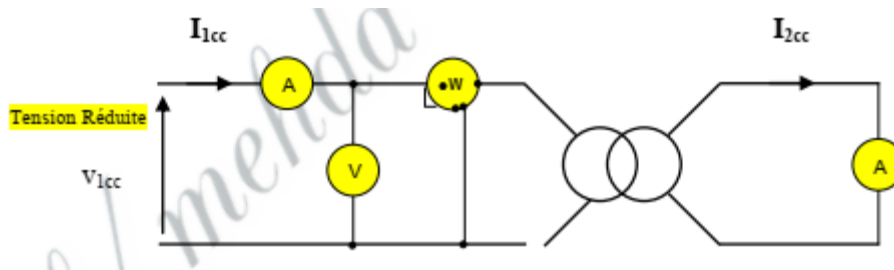


Figure 3.10 Essai en court circuit d'un transformateur monophasé

L'essai en court-circuit étant réalisé sous tension primaire réduite (V_{1cc} représente 5 à 10% de V_{1N}), les pertes fer sont très faibles (le flux est forcé par V_1) et peuvent être négligées en première approximation :

$$P_{1cc} = P_{fercc} + P_{Jcc} \approx P_{Jcc} = R_s \times I_{2cc}^2 \rightarrow R_s \approx \frac{P_{1cc}}{I_{2cc}^2} \text{ et } X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_s^2}$$

- Essai en continu, méthode voltampère-métrique :

On peut accéder à $R_s=m^2r_1+r_2$ en mesurant directement r_1 et r_2 en continu (il n'y a plus de f.e.m. induite en continu et le transformateur est équivalent à r_1 coté primaire et r_2 coté secondaire).

Bilan énergétique et Rendement :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2 I_2 \cos(\varphi_2)}{V_2 I_2 \cos(\varphi_2) + p_J + p_{fer}}$$

- Détermination directe : on mesure P_1 et P_2
- Détermination indirecte : on mesure P_2 , p_J et p_{fer}

4. Les différentes pertes

La puissance P_1 absorbée par le transformateur est plus grande que la puissance P_2 restituée au secondaire du transformateur, appelée également puissance utile disponible. La différence entre ces deux grandeurs représente toutes les pertes que nous devons prendre en compte avec le transformateur réel. Ces pertes sont les suivantes :

- **Les pertes par effet Joule**

Les pertes par effet Joule, appelées également pertes dans le cuivre, sont notées p_J ou p_c . Ce sont les pertes occasionnées par le passage du courant dans les enroulements du primaire et du secondaire. Ces pertes sont proportionnelles au carré de la valeur efficace de l'intensité du courant qui traverse chaque enroulement.

- **Les pertes Joules sont déterminées soit :**

à partir de r_1 et r_2 ou R_s : $p_J = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 = R_s I_2^2$

à partir de l'essai en court-circuit : $P_{1cc} = p_{Jcc} + p_{fercc} \approx p_{Jcc}$ et $p_{Jcc} = p_{JN}$ si $I_{2cc} = I_{2N}$

- **Les pertes magnétiques**

Les pertes magnétiques, appelées aussi pertes dans le fer sont notées p_{mag} ou p_{fer} . Ce sont les pertes dues aux fuites magnétiques, à l'hystérésis et enfin aux courants de Foucault. Ces pertes ne dépendent que de la valeur efficace V_1 de la tension $u_1(t)$, appliquée au primaire

Les pertes fer sont déterminées à partir de l'essai à vide :

$P_{10} = p_{J0} + p_{fer0} \rightarrow p_{fer0} = P_{10} - p_{J0}$ et $p_{fer0} = p_{ferN}$ si l'essai est réalisé sous tension primaire nominale.

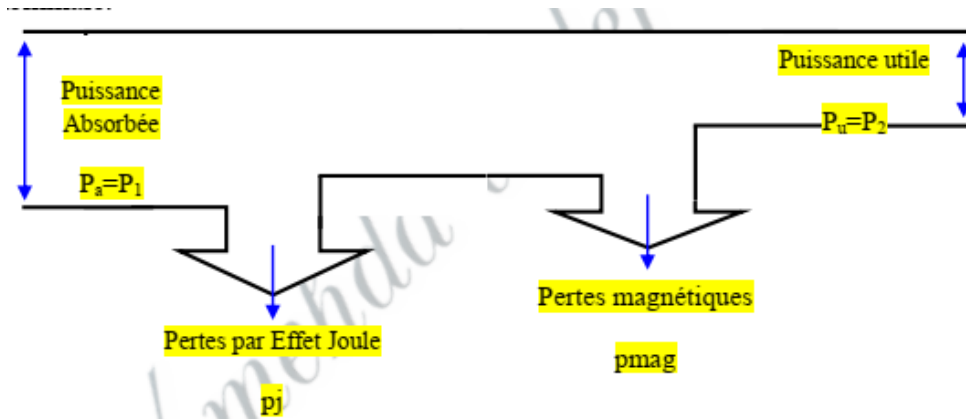


Figure 3.11 Bilan de Puissance

- La puissance absorbée au primaire

$$P_1 = V_1 I_1 \cos(\varphi_1)$$

- La puissance restituée au secondaire

$$P_2 = V_2 I_2 \cos(\varphi_2) = P_1 - p_j - p_{mag}$$

- Au niveau des puissances réactives

$$Q_1 = V_1 I_1 \sin(\varphi_1)$$

$$Q_2 = V_2 I_2 \sin(\varphi_2)$$

5. plaque signalétique

- Valeur de la puissance apparente S_N , qui sert de base à la construction du transformateur.
- Tension primaire nominale U_{1N} .
- Tension secondaire sous U_{1N} à vide : U_{2v} .
- Fréquence d'utilisation.
- Facteur de puissance.

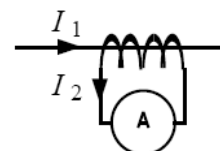
e) Autres Transformateurs :

1. Transformateur d'isolement

Transformateur tel que $m = 1$ est utilisé pour assurer une isolation galvanique entre circuits, ou encore adapter le régime de neutre (schéma de mise à la terre) aux besoins de l'installation. **Transformateur de mesure**

Transformateur utilisé pour adapter la gamme et assurer l'isolation par rapport au dispositif mesuré d'un voltmètre ou d'un ampèremètre

2. Transformateur de courant



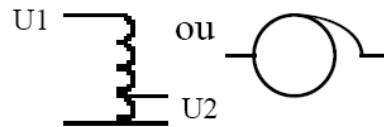
Transformateur de mesure abaisseur de courant (donc élévateur de tension), soit : $m > 1$. On l'utilise notamment pour mesurer l'intensité d'un courant fort. Le primaire peut alors se réduire à une seule spire ! Ce type de transformateur s'utilise avec secondaire en court-circuit (dans le cas contraire, la tension apparaissant au secondaire pourrait être très élevée).

3. Transformateur à impulsion

Ce type de transformateur est utilisé pour la commande des thyristors, triacs et des transistors. Il présente, par rapport à l'opto-coupleur, les avantages suivants : fonctionnement possible à fréquence élevée, simplification du montage, possibilité de fournir un courant important, bonne tenue en tension.

4. Autotransformateur

Transformateur simplifié à un seul enroulement. Ne permet pas l'isolation galvanique, mais autorise un réglage fin de la tension secondaire par déplacement du curseur servant de connexion de sortie sur l'enroulement.



5. transformateurs triphasés

La production, le transport est une importante partie de la distribution de l'énergie électrique sont réalisés en courant alternatif triphasé, nécessitant donc l'utilisation de transformateurs triphasés.

Le circuit magnétique d'un transformateur triphasé est de forme identique à celui d'un transformateur monophasé, mais reçoit

une paire d'enroulements primaire/secondaire sur chaque "barre".

$$K = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \quad K = \frac{N_1}{N_1 - N_2}$$

Avec les différents couplages, étoile et triangle au primaire et étoile, triangle et zig-zag au secondaire on obtient plusieurs combinaisons (Figure 3.12). On note : Y pour étoile, D pour triangle et Z pour zig-zag. Soit un ensemble de neuf combinaisons possibles : YY, YD, YZ, DD, DY, DZ, ZZ, ZY et ZD.

Une représentation plus significative consiste à utiliser une lettre majuscule pour la haute tension et une lettre minuscule pour la basse tension.

Exemple: Yy, Yd (HT/BT)

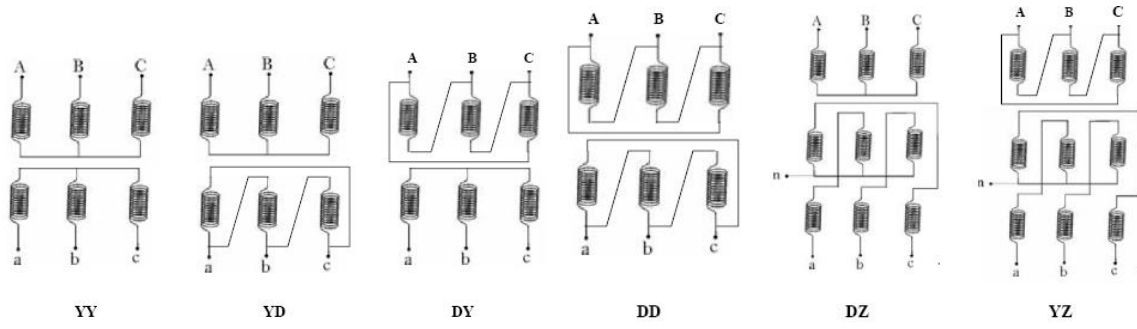


Figure 3.12: Différentes configurations du transformateur triphasé

CHAPITRE 6

Introduction aux Machines Electriques

1. Introduction

Les machines électriques tournantes sont des convertisseurs d'énergie. Lorsqu'elles transforment de l'énergie électrique en énergie mécanique, on dit qu'elles fonctionnent en moteur. En revanche, si elles transforment l'énergie mécanique apportée par une autre machine en énergie électrique, on dit qu'elles fonctionnent en génératrice, [23]. L'objectif de cette partie est de comprendre le fonctionnement des moteurs électriques.

Nous

verrons les notions de puissance, de pertes et de rendement. Nous étudierons de manière simplifiée comment ces moteurs peuvent être commandés. Une introduction sur le magnétisme et sur le triphasé sont nécessaires pour percevoir le fonctionnement de ses convertisseurs d'énergie. Les moteurs électriques se situent dans la chaîne d'énergie d'un système.

Nous étudierons dans ce chapitre les moteurs à courant continu, à courant alternatif triphasé dit asynchrones triphasés, pas à pas et d'autres types de moteurs. Nous verrons aussi comment se comportent certains de ces moteurs en termes de bilan énergétique.

2. les machines à courant continu (M CC)

La machine à courant continu est un convertisseur d'énergie, totalement réversible, elle peut fonctionner soit en moteur, convertissant de l'énergie électrique en énergie mécanique, soit en génératrice, convertissant de l'énergie mécanique en énergie électrique. Dans les deux cas un

champ magnétique est nécessaire aux différentes conversions. Cette machine est donc un convertisseur électromécanique.

3. Principe de fonctionnement

- Cas Générateur :

Dans un repère, un conducteur de longueur L est en mouvement à vitesse constante V dans un champ B uniforme et orthogonal au plan de mouvement du conducteur (figure 6.1).

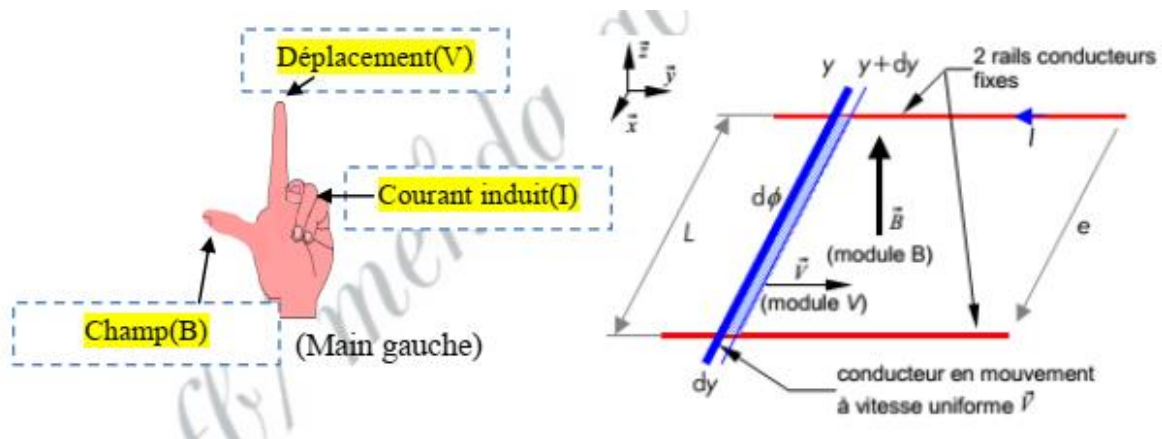


Figure 6.1. Barre en translation dans le champ B .

Entre t et dt , la barre parcourt la distance élémentaire $dy = V \cdot dt$

Le flux coupé par le conducteur est alors : $d\Phi = B \cdot L \cdot dy$

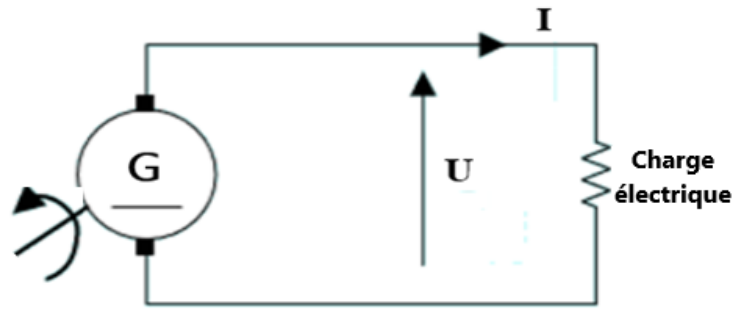
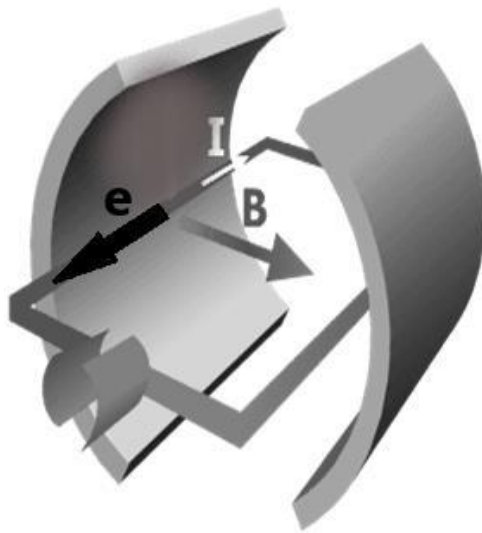
En appliquant (en module) la loi de Faraday, on obtient l'expression de la f.e.m.

induite :

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot L \cdot V$$

Rq : Si l'induction ou la vitesse changent de sens, le sens du flux change et la f.e.m. change de signe

Fonctionnement en génératrice (dynamo): les conducteurs du rotor sont à la fois en mouvement de rotation et plongés à l'intérieur d'un champ magnétique, ils sont alors le siège d'une force électromotrice FEM (une tension).



Champ inducteur B + rotation de la spire donnent :

- variation du flux magnétique
- création d'une fem induite (e) alternative

Cas Moteur

Un conducteur (une barre) de longueur l qui est placé dans un champ magnétique B et est parcouru par un courant I , est alors soumis à une force électromagnétique de Laplace dont le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite. La figure suivante montre le conducteur placé dans un champ magnétique et la force F à laquelle il est soumis.

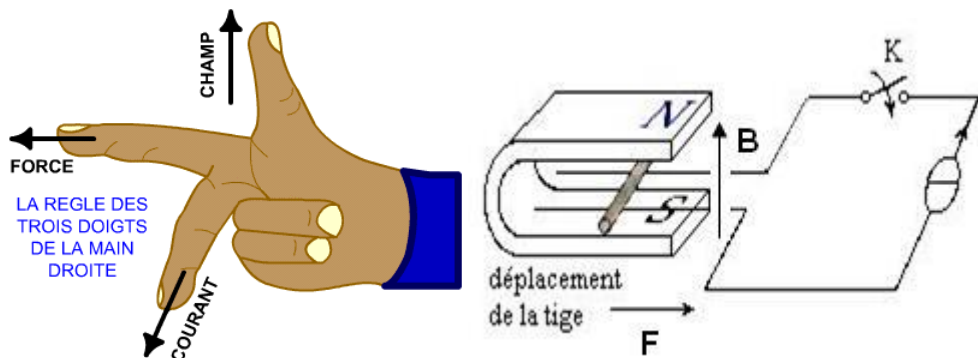


Figure 6.3. Barre place dans un champ B .

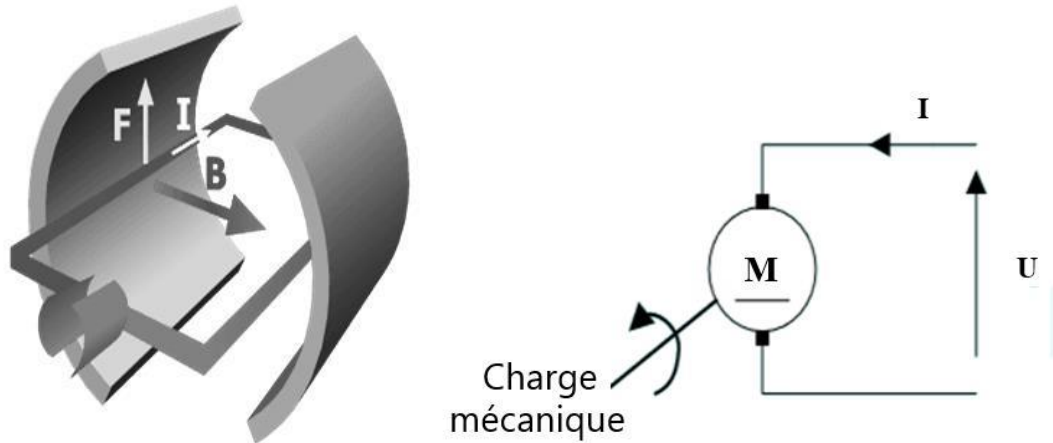
Les trois doigts de la main droite :

Pour déterminer le sens de la force, il faut placer les trois doigts (pouce, index, majeur) perpendiculairement entre eux.

- Le pouce se place dans le sens du champ (le sens des lignes d'induction est toujours du N au S à l'extérieur d'un aimant et du S au N à l'intérieur).
- Le majeur se place dans le sens du courant (sens conventionnel toujours du + vers le -).

- L'index détermine alors le sens de la force.

Fonctionnement en moteur : les conducteurs du rotor sont à la fois traversés par un courant électrique et plongés à l'intérieur d'un champ magnétique, ils sont alors soumis à une force électromagnétique F .



Champ magnétique inducteur B + courant d'induit donnent :

- Forces électromagnétiques (forces de Laplace)
- Couple électromagnétique
- Rotation du rotor

6. Constitution d'une machine à courant continu

Une machine à courant continu comprend quatre parties principales :

- ✚ l'inducteur ;
- ✚ l'induit ;
- ✚ le collecteur ;
- ✚ les balais également appelés charbon.

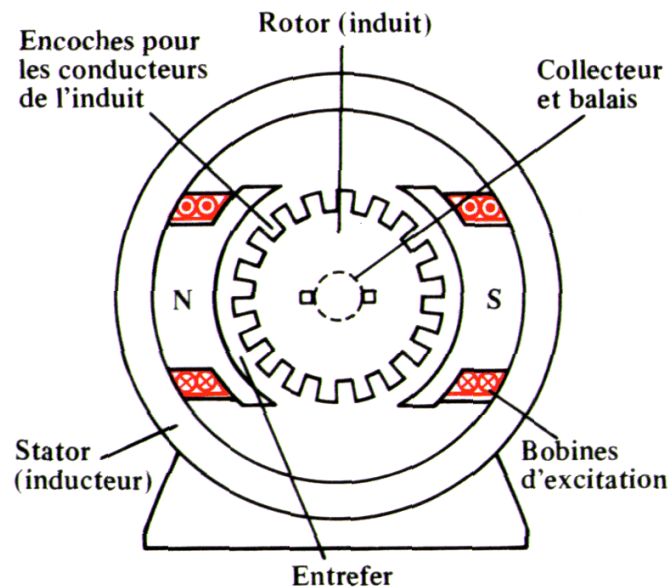
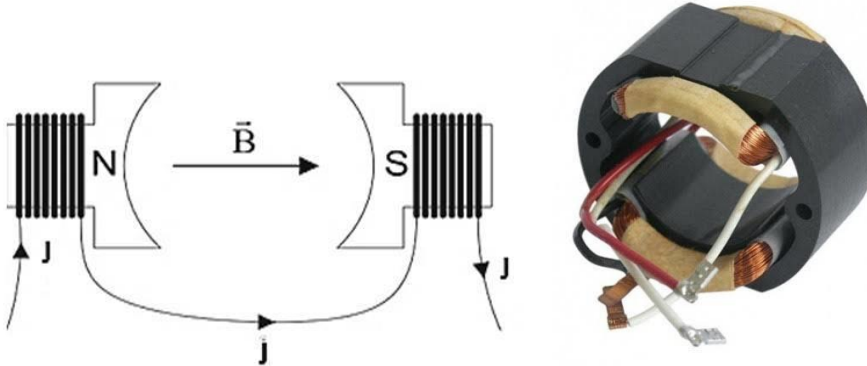


Figure.6.4 Constitution d'une machine à courant continu

A. l'inducteur (ou circuit d'excitation) :

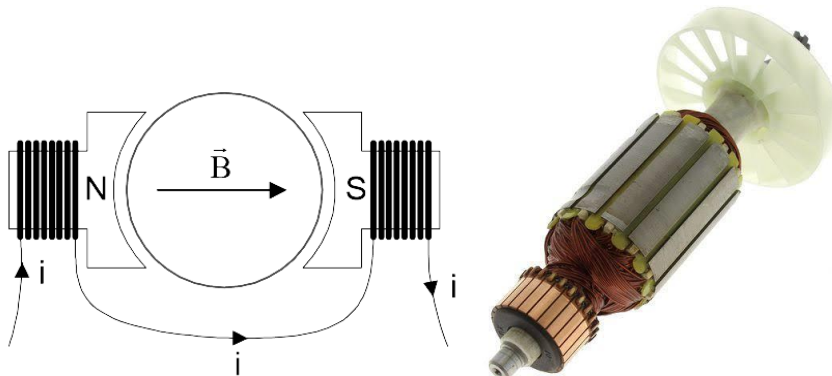
C'est un aimant ou un électroaimant (bobinage parcouru par un courant continu)



Dans une machine à courant continu, l'inducteur est situé sur la partie fixe de la machine (le stator). Il sert à créer un champ magnétique (champ "inducteur") dans le rotor.

B. L'induit (circuit de puissance)

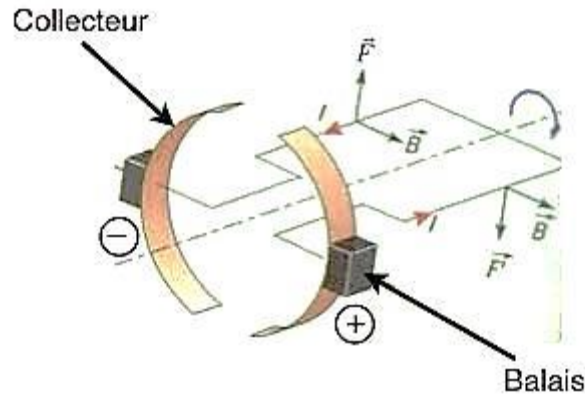
L'induit est situé au rotor (partie tournante de la machine), C'est un bobinage parcouru par un courant continu (courant d'induit).



L'induit est l'organe électromagnétique chargé de recevoir l'induction de l'inducteur et de la transformer en électricité (générateur) ou en force (moteur).

C. Le collecteur et les balais

Le système collecteur-balais sont des organes permettant de créer une connexion électrique entre la partie fixe (stator) et, la partie tournante (rotor). Dans ce cas le câblage entre les deux parties est impossible.



Le collecteur consiste en un anneau conducteur (généralement en cuivre), sectionné en un nombre pair de parties isolées entre elles, fixé avec une entretoise isolante sur l'axe de la machine. La connexion électrique est créée entre les parties conductrices et la partie fixée sur le stator (bornier), les balais réalisés à base de carbone. On alimente en électricité le bobinage du rotor par ces contacts (fonctionnement en moteur) ou au contraire on récupère l'électricité produite par le bobinage du rotor (fonctionnement en générateur).

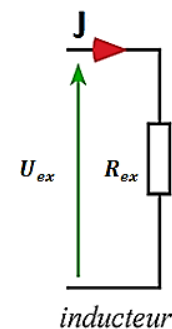
4. Schéma équivalent des machines à courant continu.

Les bobinages du stator et du rotor sont parcourus par un courant continu, alors le seul composant électrique qui entre en jeu dans le circuit électrique équivalent est la résistance électrique.

1. Schéma équivalent de l'inducteur :

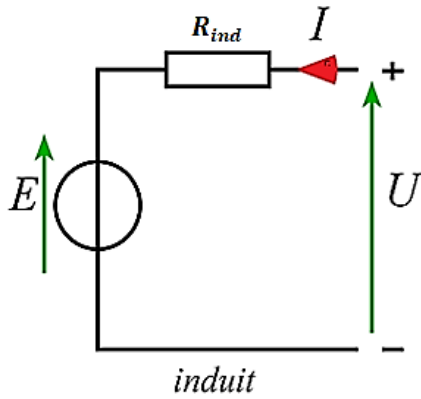
La bobine de l'inducteur est alimenté par une tension dite *tension d'excitation* U_e (pour produire le flux magnétique). Alors elle est parcourue par un courant d'excitation J . L'inducteur présente une résistance dite résistance de l'inducteur ou résistance d'excitation R_e . La tension aux bornes de l'inducteur est :

$$U_{ex} = R_{ex} J$$

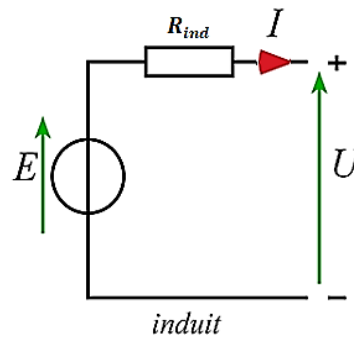


2. Schéma équivalent de l'induit

Dans les deux cas, génératrice ou moteur, la bobine de l'induit se trouve parcouru par un courant électrique appelé courant d'induit I . Le sens de ce courant est entrant dans le cas du moteur et sortant dans le cas d'une génératrice. La tension aux bornes de l'induit est U . Aussi, dans les deux cas, le rotor est en rotation dans un champ magnétique. Alors l'induit est toujours siège d'une tension E .



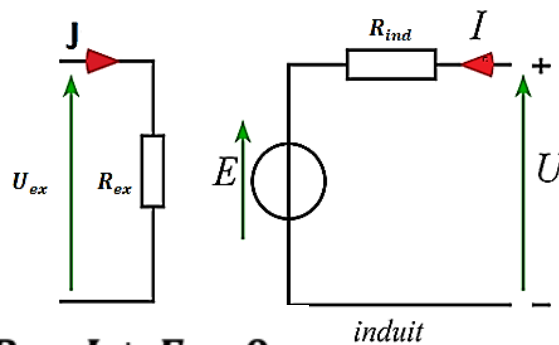
Cas du moteur



cas de la génératrice

Alors le schéma équivalent sera :

Cas du moteur



Alors :

$$-U + R_{ind} I + E = 0$$

$$U_{ex} = R_{ex} J$$

$$U = E + R_{ind} I$$

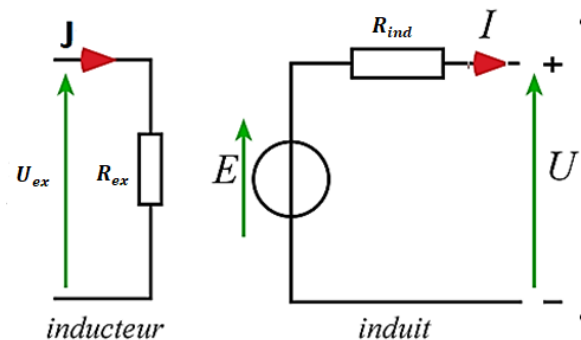
Cas de la génératrice :

$$-U - R_{ind} I + E = 0$$

alors

$$U = E - R_{ind} I$$

$$U_{ex} = R_{ex} J$$



En pratique $R_{ex} \gg R_{ind}$ et $J \ll I$ 74

5. Force électromotrice et couple dans la machine C.C. :

A. Expression de la fem induite

La force électromotrice induite dans une machine est donnée par l'expression (loi de Faraday) :

$$E = k_e \Phi \Omega$$

E : fem induite (tension continue en Volts)

Φ : flux magnétique crée sous un pôle par l'inducteur.

Ω : vitesse de rotation (en rad/s) $\Omega = \frac{2\pi n}{60}$ où n la vitesse en tours/minutes

k_e : constante qui dépend de la machine considérée

B. Expression du couple électromagnétique :

Le couple électromagnétique dans une machine est donné par l'expression (Loi de Laplace) :

$$C_{em} = K_c \Phi I$$

C_{em} : Couple électromagnétique (en Nm)

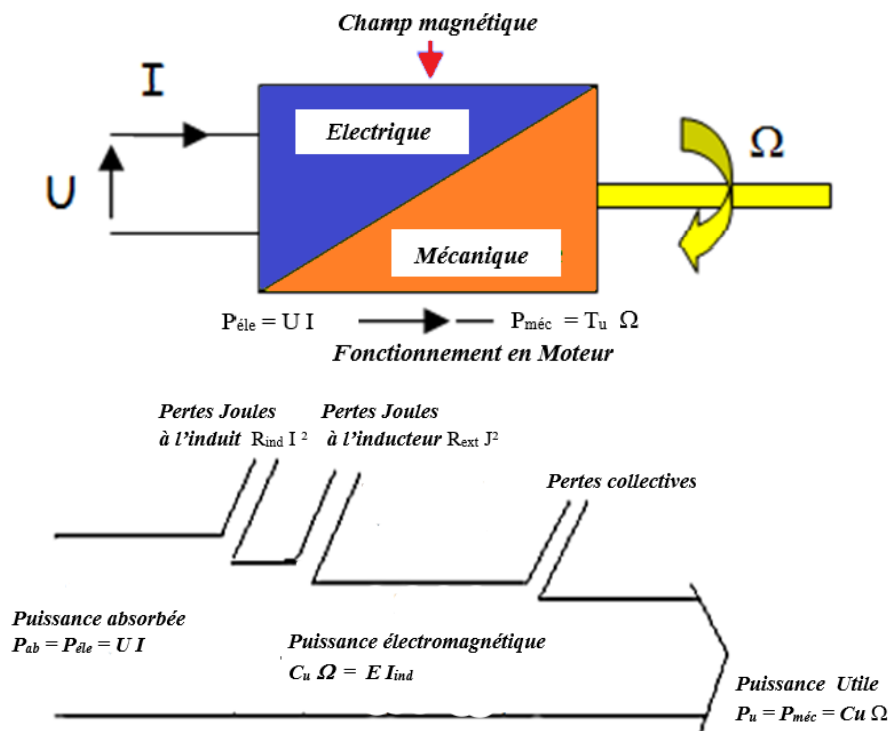
I : courant d'induit (en A)

K_c : Constante qui dépend de la machine.

6. Bilan de puissance et rendement :

1. cas du moteur

Le moteur transforme l'énergie électrique absorbée en une autre énergie mécanique pour entrainer une charge mécanique (pompe, hélice,...). Une partie de l'énergie absorbée est perdue dans le moteur.



Les puissances :

1. Puissance absorbée = Puissance électrique : $P_{\text{éle}} = U I$
2. Puissance utile = Puissance mécanique : $P_{\text{méc}} = T \Omega$

Pertes Joules :

3. Induit : $P_{\text{Jinduit}} = R_{\text{ind}} I^2$
4. Inducteur : $P_{\text{Jinducteu}} = R_{\text{ext}} J^2 = U_{\text{ext}} J$

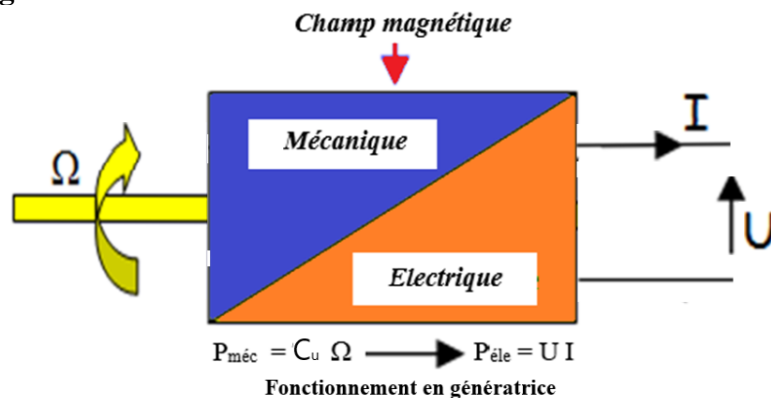
Pertes collectives (ou constantes) :

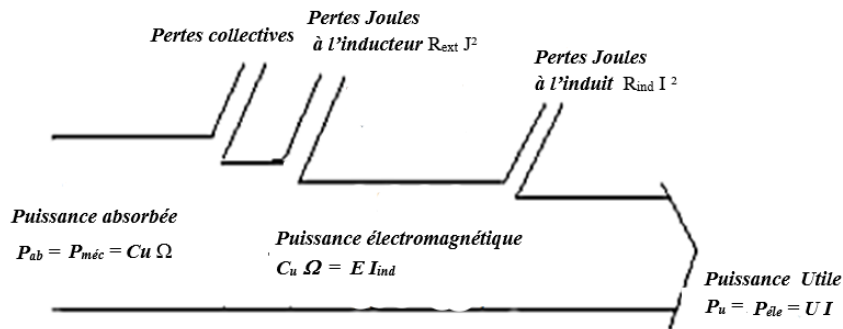
1. Pertes mécaniques (frottements, vibrations, ventilation)
2. Pertes fer (dans le matériau ferromagnétique)

Le rendement du moteur est :

$$\eta = \frac{P_{\text{méc}}}{P_{\text{éle}}} = \frac{P_u}{P_u + \sum \text{pertes}}$$

2. cas de la génératrice :





1. Puissance absorbée = Puissance mécanique = $C\Omega$
2. Puissance utile = Puissance électrique = $U I$

Pertes Joules :

3. Induit : $P_{J\text{induit}} = R_{\text{ind}} I^2$
4. Inducteur : $P_{J\text{inducteu}} = R_{\text{ext}} J^2 = U_{\text{ext}} J$

Pertes collectives (ou constantes) :

1. Pertes mécaniques (frottements, vibrations, ventilation)
2. Pertes fer (dans le matériau ferromagnétique)

Le rendement de la génératrice est :

$$\eta = \frac{P_{\text{éle}}}{P_{\text{méc}}} = \frac{P_u}{P_u + \sum \text{pertes}}$$