المحور الثاني

المتتاليات العددية

المحاضرة : 03

أ- تذكير

1. تعريف

نسمي متتالية عددية (U_n) كل تطبيق من مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$

U_n يسمى الحد ذو الدليل n

2- كيفية تعريف متتالية

- نقول أن المتتالية (U_n) هي متتالية صريحة إذا أمكن كتابة حدها العام U_n بدلالة n

  ونكتب إذن $U_n = f(n)$ حيث f هي دالة معرفة على $\mathbb{N}$ (و عادة على $\mathbb{R}^+$)

  مثال: $U_n = \frac{1}{n+1}$

- و نقول أن المتتالية (U_n) هي متتالية معرفة بالتراجع إذا كان كل حد معرف بدلالة الحدود التي قبله

  ونكتب إذن $U_{n+1} = f(U_n)$ حيث f هي دالة معرفة عادة على $\mathbb{R}$

  مثال:

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2 \\ U_n = 1 \end{cases}$$

3- تعريف

- نقول أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما إذا

$$\exists N \epsilon \mathbb{N}, \quad tel\ que \quad \forall\, n > N\,, \quad U_{n+1} > U_n$$

- و نقول أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما إذا

$$\exists N \epsilon \mathbb{N}, \quad tel\ que \quad \forall\, n > N\,, \quad U_{n+1} < U_n$$

مثال:

أدرس إتجاه تغير المتتاليتين المعرفتين بحديهما العامين $U_n = n^2 - n\,, n\epsilon\mathbb{N}^*$ ، V_n معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$V_{n+1} = \sqrt{V_n} \quad , \quad V_0 = 2$$

الجواب

<u>بالنسبة إلى U_n</u>

$$U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n\ ) = 2n > 0$$

و منه U_n متزايدة تماما

<u>بالنسبة إلى V_n</u>

أولا : نلا حظ أن $\forall\, n\epsilon\mathbb{N}^*\,, V_n > 1$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\sqrt{V_n}}{V_n} = \frac{1}{\sqrt{V_n}} < 1$ ، ومنه V_n متناقصة

4- متتاليات خاصة

1.4 المتتالية الحسابية

نقول عن المتتالية (U_n) أنها متتالية حسابية إذا حققت:

$$\forall\, n\epsilon\mathbb{N}^*\,,\quad U_{n+1} - U_n = r \quad / \quad r = C^{te}\epsilon\mathbb{R}$$

r يسمى أساس المتتالية الحسابية (U_n)

- بما أن $U_{n+1} = U_n + r$ فإن :

- $U_1 = U_0 + r$
- $U_2 = U_0 + 2r$

…………………

- $U_n = U_0 + nr$

وعموما

-

- $U_{p+1} = U_p + r$
- $U_{p+2} = U_p + 2r$

…………………

- $U_n = U_p + (n-p)r$

لدينا :

$$U_0 + U_n = 2U_0 + nr$$

$$U_1 + U_{n-1} = 2U_0 + nr = U_0 + U_n$$
$$U_2 + U_{n-2} = 2U_0 + nr = U_0 + U_n$$

………………………………………………………

$$U_p + U_{n-p} = 2U_0 + nr = U_0 + U_n$$
$$U_p + U_q = 2U_0 + nr = U_0 + U_n \quad / \quad p + q = n$$

مجموع حدود متوالية لمتتالية حسابية

نضع $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + U_n$

لدينا أيضا $S = U_n + U_{n-1} + \cdots + U_1 + U_0$

بجمع العبارتين المتساويتين نجد $2S = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + \cdots + (U_{n-1} + U_1) + (U_n + U_0)$

ومنه $2S = \underbrace{(U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \cdots + (U_0 + U_n)}_{n+1\, fois}$

إذن $2S = (\mathrm{n}+1)(U_0 + U_n)$

و في الأخير
$$S = \frac{(n+1)}{2}(U_0 + U_n)$$

تجدر الإشارة إلى أن $(n + 1)$ يمثل عدد الحدود
U_0 يمثل الحد الأول من المجموع
U_n يمثل الحد الأخير من المجموع
بنفس الطريقة نجد

$$S = \sum_{k=p}^{n} U_k = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \cdots + U_{n-1} + U_n = \frac{(n-p+1)}{2}(U_p + U_n)$$

مثال

- حالة خاصة $S = 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- لتكن المتتالية (U_n) معرفة بـ $U_n = 2n + 3$ أحسب المجموع $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{16}$

الجواب:

لدينا $U_{n+1} - U_n = 2$

و منه U_n متتالية حسابية و أساسها $r = 2$ إذن

$$S = \frac{17}{2}(3 + 35) = 323$$

تمرين منزلي :

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r أحسب

$$S_1 = U_0 + U_2 + U_4 + \cdots + U_{2n}$$
$$S_2 = U_1 + U_3 + U_5 + \cdots + U_{2n+1}$$

4.2 المتتالية الهندسية

نقول عن المتتالية (U_n) أنها متتالية هندسية إذا حققت:

$$\forall\, n \epsilon \mathbb{N}^*, \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = q \quad / \quad q = C^{te} \epsilon \mathbb{R}$$

q يسمى أساس المتتالية الهندسية (U_n)

- بما أن $U_{n+1} = qU_n$ فإن :

- $U_1 = qU_0$
- $U_2 = q^2 U_0$

…………………

- $U_n = q^n U_0$

وعموما

- $U_{p+1} = qU_p$
- $U_{p+2} = q^2 U_p$

…………………

- $U_n = q^{n-p} U_p$

مجموع حدود متوالية لمتتالية هندسية

لتكن (U_n) أنها متتالية هندسية أساسها $q \neq 1$

نضع

$$S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + U_n \qquad \ldots\ldots(1)$$

ومنه

$$qS = qU_0 + qU_1 + \cdots + qU_{n-1} + qU_n$$

$$qS = U_1 + \cdots + U_n + U_{n+1} \qquad \ldots\ldots(2)$$

بطرح (2) من (1) نجد

$$S - qS = U_0 - U_{n+1}$$

أي

$$(1-q)S = U_0(1-q^{n+1})$$

و

$$S = \frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)} U_0$$

$(n+1)$ يمثل عدد الحدود ، U_0 يمثل الحد الأول من المجموع

وبالمثل نجد :

$$S = \sum_{k=p}^{n} U_k = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \cdots + U_{n-1} + U_n = \frac{(1-q^{n-p+1})}{(1-q)} U_p$$

مثال

- إذا كان $q \neq 1$: $1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}$
- لتكن (U_n) المتتالية المعرفة بـ $\frac{3^{-n+2}}{2^{n+3}}$ أحسب $S = U_5 + U_6 + \cdots + U_{16}$

$$U_n = \frac{3^{-n+2}}{2^{n+3}} = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)\left(\frac{1}{(3.2)^n}\right)$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{6}$$

إذن (U_n) متتالية هندسية و أساسها $\frac{1}{6}$

$$S = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{12}}{1-\frac{1}{6}} = \ldots.$$

تمرين منزلي :

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها $q \neq 1$ أحسب

$$S_1 = U_0 + U_2 + U_4 + \cdots + U_{2n}$$

$$S_2 = U_1 + U_3 + U_5 + \cdots + U_{2n+1}$$