المحور الأول

التحليل التوفيقي

المحاضرة : 02

ج/ تبديله

ج1/ تبديله بدون تكرار

نسمي تبديله بدون تكرار لـ n عنصر مشكلة لمجموعة E كل تصفيف مرتب لعناصر E من غير تكرار العنصر أكثر من مرة

مثال:

تبديلات بدون تكرار للمجموعة $\{1, 2, 3\}$ هي $(1,2,3)$, $(1,3.2)$, $(2,1,3)$, $(2,3.1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$

ج.2.1/ قضية

التبديلات بدون تكرار لـ n عنصر هو ترتيبات بدون تكرار لنفس العناصر لما $p = n$

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

البرهان

يمكن إختيار العنصر الأول بـ n طريقة

يمكن إختيار العنصر الثاني بـ $(n-1)$ طريقة لأنه لأنه لا يمكن تكرار العنصر المسحوب سابقا

يمكن إختيار العنصر الثالث بـ $(n-2)$ طريقة، و هكذا بالتراجع .... إلى غاية

يمكن إختيار العنصر رقم n بـ $(n-n+1) = 1$ طريقة

و العدد الإجمالي إذن هو

$$n(n-1)(n-2) \dots \dots \times 2 \times 1 = n!$$

مثال

بكم طريقة يمكن إسكان 4 عائلات في عمارة تحوي 4 شقق

الجواب:

لدينا : 4 طرق مختلفة لإسكان العائلة الأولى

3 طرق مختلفة لإسكان العائلة الثانية

2طرق مختلفة لإسكان العائلة الثالثة

1 طريقة لإسكان العائلة الرابعة

العدد الإجمالي هو : $P_4 = 4! = 24$ طريقة مختلفة

ج2/ تبديله بتكرار

في حالة ما إذا كان هناك عنصر من المجموعة E (المجموعة المسحوب منها) مكرر k مرة في هذه المجموعة فإن عدد التبديلات يتناقص و في هذه الحالة نجد أن كل $k!$ تصفيف يكون متطابق مع تبديلة واحدة

و يصبح عدد التبديلات بتكرار هو : $p_n = \frac{n!}{k!}$

مثال:

نعتبر الكلمة "CELLULE" عدد الكلمات (ذات معنى أو بدون معنى) الممكن تكوينها بحروف هذه الكلمة هو

$$p_7 = \frac{7!}{2!\,3!} = 420$$

لدينا حرفين مكررين E : 2مرة و L : 3 مرات

د/ توفيقة

نسمي توفيقة لـ p عنصر من n عنصر مشكلة لمجموعة E كل إختيار غير مرتب لـ p عنصر من E

مثال:

التوفيقات بثلاث عناصر للمجموعة $\{1,2,3,4\}$ هي : $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$

د..1/ قضية

عدد التوفيقات لـ p عنصر من n عنصر هي

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

البرهان

عددالترتيبات بدون تكرار لـ p عنصر من n عنصر هو : A_n^p في حين نجد أن كل توفيقة تتولد عنها $p!$ تبديلة بدون تكرار

إذن فعدد التوفيقات هو : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

مثال

- بالنسبة إلى المثال السابق و الخاص بالمجموعة $\{1,2,3,4\}$ فعدد التوفيقات بثلاث عناصر المأخوذة من هذه المجموعة هو

$$C_n^p = C_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = 4$$

- بكم طريقة يمكن إختيار ممثلين إثنين للطلبة من أصل 10 طلبة
الجواب : العدد هو

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10.9}{2} = 45$$

د.2/ خواص

$C_n^n = 1$, $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^{n-1} = n$, $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_n^p = C_n^q \;\; si : p + q = n$

- $$\boxed{C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}}$$
- البرهان
- واضح
- برهان العلاقة الأخيرة **واجب منزلي**
- **د3/ دستور ثنائي الحد لنيوتن**

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

من أجل n=2 نجد:

$$(a+b)^2 = \sum_{p=0}^{2} C_2^p a^{2-p} b^p = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a \;\; b \;\; + C_2^2 a^0 b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

طريقة لحساب معاملات كثير الحدود $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$

بتوظيف العلاقة $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$
نحصل على الجدول الأتي (حيث n يمثل السطر و pيمثل العمود)

0)	1	$(a+b)^0 = 1$
1)	1 1	$(a+b)^1 = a+b$
2)	1 2 1	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3)	1 3 3 1	$(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$
4)	1 4 6 4 1	
5)	1 5 10 10 5 1	

تمرين منزلي : أحسب $(a+b)^4$; $(a+b)^5$ و $(a+b)^6$