Réduction des Endomorphismes

Chapitre 1

Diagonalisation des endomorphismes

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f est un endomorphisme de E. Si on se place dans une base de E, on peut représenter f par une matrice. Le but de ce chapitre est de trouver une base de E telle que la matrice représentant f dans cette base soit la plus simple possible, c'est-à-dire la matrice est diagonale.

1.1 Vecteurs propres, valeurs propres

Définition 1.1.1. *Soit v un vecteur de E. On dit que v est un vecteur propre de f si*

- *v n'est pas nul,*
- *Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que*
$$f(v) = \lambda v.$$

Le scalaire λ s'appelle la valeur propre associée à v.
Le couple (λ, v) s'appelle élément propre de f.

Définition 1.1.2. *L'ensemble des valeurs propres de f, noté $Sp(f)$, est dite le spectre de f, c'est à dire*

$$Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \exists v \in E^* :\ f(v) = \lambda v\}.$$

Proposition 1.1.1. *Soit λ une valeur propre de f, le sous ensemble constitué des vecteurs propres de f associé à λ et de 0_E est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace propre de f associé à λ et noté E_λ, c'est à dire*

$$E_\lambda = \{v \in E :\ f(v) = \lambda v\}.$$

Démonstration. On a $0_E \in E_\lambda$. Soit $v_1, v_2 \in E_\lambda$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha f(v_1) + \beta f(v_2), \\ &= \alpha \lambda v_1 + \beta \lambda v_2, \\ &= \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2). \end{aligned}$$

Donc $(\alpha v_1 + \beta v_2) \in E_\lambda$, ainsi E_λ est un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple 1.1.1.

1. *Soit l'endomorphisme identité*

$$\begin{aligned} Id_E :\ & E \longrightarrow E \\ & x \longmapsto Id_E(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \textit{ est une valeur propre de } Id_E &\Leftrightarrow \exists v \in E, v \neq 0 : Id_E(v) = \lambda v,\\ &\Leftrightarrow \exists v \in E, v \neq 0 : v = \lambda v,\end{aligned}$$

donc $\lambda = 1$, $Sp(Id_E) = \{1\}$.
Le sous espace propre de Id_E *associé à* $\lambda = 1$ *est :*

$$E_1 = \{v \in E : Id_E(v) = v\} = \{v \in E : v = v\} = E.$$

2. *Soit l'endomorphisme*

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x,y) &\longmapsto (3x, 5y)\end{aligned}$$

λ *est une valeur propre de* $g \Leftrightarrow \exists (x,y) \neq (0,0) : g(x,y) = \lambda(x,y)$

$$g(x,y) = \lambda(x,y) \Rightarrow \begin{cases} 3x = \lambda x\\ 5y = 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x = 0\\ (5-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Si $x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 3$ *et si* $y \neq 0 \Rightarrow \lambda = 5$, *donc les valeurs propres de* g *sont : 3,5.* $Sp(g) = \{3,5\}$.
Le sous espace propre de g *associé à* $\lambda = 3$ *est :*

$$\begin{aligned} E_3 &= \{(x,y) : g(x,y) = 3(x,y)\},\\ &= \{(x,y) : 3x = 3x, 5y = 3y\},\\ &= \{(x,y) : y = 0\} =< (1,0) > .\end{aligned}$$

Le sous espace propre de g *associé à* $\lambda = 5$ *est :*

$$\begin{aligned} E_3 &= \{(x,y) : g(x,y) = 5(x,y)\},\\ &= \{(x,y) : 3x = 5x, 5y = 5y\},\\ &= \{(x,y) : x = 0\} =< (0,1) > .\end{aligned}$$

Proposition 1.1.2. *la valeur propre associée à un vecteur propre est unique.*

Démonstration. Supposons que λ_1, λ_2 sont deux valeurs propres associées à un vecteur v, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On a

$$\lambda_1 \textit{ est une valeur propre associe } v \Rightarrow f(v) = \lambda_1 v.$$

$$\lambda_2 \textit{ est une valeur propre associe } v \Rightarrow f(v) = \lambda_2 v.$$

Donc $\lambda_2 v - \lambda_1 v = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ (Contradiction). □

Remarque 1.1.1. *Le vecteur propre associé à une valeur propre n'est pas unique, en effet si* v *est un vecteur propre associée une valeur propre* λ, *alors* kv *est aussi un vecteur propre associée à* λ *car* $f(\lambda kv) = kf(\lambda v) = \lambda(kv)$.

Théorème 1.1.1. *La dimension du sous-espace propre E_λ associé à une valeur propre λ de degré de multiplicité m est inférieure ou égale à cet degré de multiplicité m, i.e*

$$dimE_\lambda \leq m.$$

Démonstration. Soit l la dimension du sous espace propre associé à la valeur propre λ de degré de multiplicité m, il existe donc l vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_l$ formant une base de E_λ. Ces vecteurs vérifient par définition $f(v_1) = \lambda v_1, f(v_2) = \lambda v_2, \ldots, f(v_l) = \lambda v_l$. Complétons ce système libre de l vecteurs en une base de l'espace vectoriel E par des vecteurs $v_{l+1}, v_{l+2}, \ldots, v_n$. La matrice de f sur cette base est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & b_{1,l+1} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & b_{2,l+1} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & b_{l,l+1} & \cdots & b_{l,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{l+1,l+1} & \cdots & b_{l+1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,l+1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de f, que l'on peut calculer sur cette nouvelle base, est donc :

$$P(X) = \begin{vmatrix} \lambda - X & 0 & \cdots & 0 & b_{1,l+1} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \lambda - X & \cdots & 0 & b_{2,l+1} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - X & b_{l,l+1} & \cdots & b_{l,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{l+1,l+1} - X & \cdots & b_{l+1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,l+1} & \cdots & b_{n,n} - X \end{vmatrix}.$$

Un développement l fois de suite par rapport à la première colonne montre que l'on peut au moins mettre en facteur $(\lambda - X)^l$ dans ce polynôme. On a donc $l \leq m$. □

1.2 Caractérisation des valeurs propres

Proposition 1.2.1. $\lambda \in \mathbb{K}$ *est une valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda Id_E$ ne soit pas injective.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \textit{Soit } \lambda \in \mathbb{K} \textit{ une valeur propre de } f \quad &\Leftrightarrow \quad \exists v \in E, v \neq 0_E : \ f(v) = \lambda v, \\ &\Leftrightarrow \quad \exists v \in E, v \neq 0_E : \ f(v) - \lambda v = 0_E, \\ &\Leftrightarrow \quad \exists v \in E, v \neq 0_E : \ f(v) - \lambda Id_E(v) = 0_E, \\ &\Leftrightarrow \quad ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}, \\ &\Leftrightarrow \quad f - \lambda Id_E \ n'est\ pas\ injective. \end{aligned}$$

□

1.3 Cas d'un espace de dimension finie

Soit E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Considérons une base B de E et $A = \mathcal{M}at_B(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice associée à f par rapport à B.

1.3.1 Vecteurs propres, valeurs propres d'une matrice carrée

Définition 1.3.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de A si*

- *X n'est pas nul,*
- *Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que*

$$AX = \lambda X.$$

Le scalaire λ s'appelle la valeur propre associée à X.
Le couple (λ, X) s'appelle élément propre de A.

Définition 1.3.2. *L'ensemble des valeurs propres de A, noté $Sp(A)$ est dite le spectre de A, c'est à dire*

$$Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}):\ AX = \lambda X\}.$$

Théorème 1.3.1. *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si X_i est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_i, alors les vecteurs propres $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres de A, supposons que X_i est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda_i, \forall i = 1, 2, \ldots, k$.

Nous allons montrer par récurrence sur k que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, k,$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.
C'est vrai pour $k = 1$, puisque par définition un vecteur propre est nécessairement non nul. Supposons la propriété est vraie à l'ordre $k - 1$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes deux à deux et $X_1, X_2, \ldots, X_k$ des vecteurs propres associés. Supposons

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i = 0,$$

donc on a

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i X_i = -\alpha_k X_k,$$

On multipliant à gauche par la matrice A, on obtient

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_i X_i = -\alpha_k \lambda_k X_k,$$

mais on a aussi

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_k X_i = -\alpha_k \lambda_k X_k.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_k)X_i = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre $k-1$, ceci entraîne que pour tout $i = 1, 2, \dots, k-1, \alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, donc $\alpha_i = 0$, puisque $\lambda_i \neq \lambda_k$. Mais alors nécessairement $\alpha_k X_k$ est nul, donc $\alpha_k = 0$ puisque le vecteur propre X_k est non nul. Alors les vecteurs propres $X_1, X_2, \dots, X_k$ sont linéairement indépendants. □

1.4 Polynôme caractéristique

Définition 1.4.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme $det(A - \lambda I_n)$, noté $P_A(\lambda)$, est dit le polynôme caractéristique de A, c'est à dire*

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n).$$

L'équation $P_A(\lambda) = 0$ est dite l'équation caractéristique de A.

Définition 1.4.2. *Soit f un endomorphisme de E. Le polynôme caractéristique de f, noté $P_f(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice associée à f pour n'importe quelle base de E, c'est à dire*

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda),\ A = \mathcal{M}at_B(f),\ \forall B \text{ base de } E.$$

Exemple 1.4.1.

1. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique de A est*

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 1.$$

2. *Soit l'endomorphisme*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, 2x+z, x+y+2z) \end{array}$$

Soit $B = \{e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$M = \mathcal{M}at_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$P_f(\lambda) = P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2.$$

Théorème 1.4.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0.$$

Autrement dit les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\text{Soit } \lambda \text{ une valeur propre de } A &\Leftrightarrow \lambda \text{ est une valeur propre de } f(A = \mathcal{M}at_B(f), \forall\, B \text{ base de } E). \\
&\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) \text{ non injective,} \\
&\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) \text{ non bijective,} \\
&\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) \text{ n'est pas inversible,} \\
&\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible,} \\
&\Leftrightarrow det(A - \lambda I_n) = 0.
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.4.2.

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. *On a*

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

   Donc

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i,$$

   alors $Sp(A) = \{i, -i\}$.

2. *Soit* $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *On a*

$$P_B(\lambda) = det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2+\lambda)^2.$$

   Donc

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow P_B(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -2,$$

   alors $Sp(B) = \{1, -2\}$.

Remarque 1.4.1. *Les valeurs propres d'une matrice triangulaire ou diagonale sont ses éléments diagonaux. En effet si* $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice triangulaire inférieure, on a*

$$P_C(\lambda) = det(C - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda).$$

Donc $Sp(C) = \{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$.

Exemple 1.4.3.

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Donc* $Sp(A) = \{3, -1, 2\}$.

2. *Soit* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 2i & -2 & 0 & 0 \\ 4 & i-1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. *Donc* $Sp(B) = \{2, 1+i, 0\}$.

1.5 Diagonalisation des endomorphismes

Étant donné un endomorphisme f de E, on va chercher s'il existe une base de E sur laquelle f s'exprime de façon simple. pour les matrices, étant donné une matrice carrée A, on va essayer de trouver une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit plus simple que la matrice A. l'idéal serait de trouver une base de E sur laquelle la matrice de f est diagonal, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Cela signifie qu'il existe une base $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de E telle que :

$$f(u_1) = \lambda_1 u_1, f(u_2) = \lambda_2 u_2, \dots, f(u_n) = \lambda_n u_n.$$

Si A est la matrice de f sur une base quelconque, cela veut dire qu'il existe une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Définition 1.5.1. *On dit que l'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de E dans la quelle la matrice de f est diagonale, c'est a dire*

$$\mathcal{M}at_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Définition 1.5.2. *On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.*

1.5.1 Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Théorème 1.5.1. *Soit f un endomorphisme de E de dimension n , (ou A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$).*

Pour que f (respectivement A) soit diagonalisable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. *Le polynôme caractéristique de f (respectivement de A) est scindé.*
2. *Pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à son degré de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.*

Démonstration.

1) Supposons que f est diagonalisable et montrons les deux conditions :

Si f est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, il existe une base B de E sur laquelle la matrice de f s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où les scalaire $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ appartiennent à $\mathbb{K}$, et son polynôme caractéristique peut s'écrire :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix}$$

soit

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_{n-1} - \lambda)(\lambda_n - \lambda).$$

Donc le polynôme caractéristique de f est scindé. La première condition est vérifiée.
Démontrons la seconde. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f avec degré de multiplicité $m_1, m_2, \dots, m_p$ respectivement et soient $l_1, l_2, \dots, l_p$ les dimensions des sous espaces propres associés à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ respectivement.
Sur la diagonale principale de la matrice D ci-dessus, nous avons donc l_1 fois la valeur propre α_1, l_2 fois la valeur propre α_2,..., l_p fois la valeur propre α_p. Donc le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P(\lambda) = (\alpha_1 - \lambda)^{l_1} (\alpha_2 - \lambda)^{l_2} \dots (\alpha_p - \lambda)^{l_p}.$$

Cette écriture signifie (car $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont deux à deux distinctes) que l_1 est le degré de multiplicité de α_1 et ainsi de suite. Le degré de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous espace propre correspondant. La second condition est ainsi vérifiée.

2) Supposons les deux conditions sont vérifiées et montrons que f est diagonalisable :

Nous supposons donc que :

- $P(\lambda)$ admet p racines : α_1 (le degré de multiplicité est l_1), α_2 (le degré de multiplicité est l_2),..., α_p (le degré de multiplicité est l_p) dans $\mathbb{K}$ est que ce sont là (d'après la première condition) toutes les racines du polynôme caractéristique. Nous avons donc $l_1 + l_2 + \dots + l_p = n$.
- Il existe un système libre de l_1 vecteurs propres associés à la valeur propre α_1, un système libre de l_2 vecteurs propres associés à la valeur propre $\alpha_2, \dots$, un système libre de l_p vecteurs

propres associés à la valeur propre α_p. (Chacun forme donc une base du sous-espace propre E_{l_k} correspondant).

Au total, nous avons donc $l_1 + l_2 + \cdots + l_p = n$ vecteur de E, les l_1 premiers (notons les $u_{1,1}, \ldots, u_{1,l_1}$) étant des vecteurs propres associés à la valeur propre α_1, les l_2 premiers (notons les $u_{2,1}, \ldots, u_{2,l_2}$) étant des vecteurs propres associés à la valeur propre α_2 et les l_p premiers (notons les $u_{p,1}, \ldots, u_{p,l_p}$) étant des vecteurs propres associés à la valeur propre α_p.
Le théorème sur l'indépendance des sous-espaces propres implique que cette famille de n vecteur est encore libre, c'est donc une base de E. Elle est composée de vecteurs propres de f, ce qui signifie que f est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

$\square$

1.5.2 Une condition suffisante de diagonalisation

Proposition 1.5.1. *Une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n valeurs propres distincts dans $\mathbb{K}$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Si on a toutes les valeurs propres de la matrice sont simples et dans $\mathbb{K}$: le polynôme caractéristique possède n racines distincts. Chaque sous espace propre est de dimension égale à 1, et cette dimension est égale au degré de multiplicité de la valeur propre associée. La matrice est donc diagonalisable. $\square$

Remarque 1.5.1. *Attention, la proposition* (1.5.2) *s'agit uniquement d'une condition suffisante.*

1.5.3 Technique pratique de diagonalisation

La technique pour diagonaliser une matrice A sur $\mathbb{K}$ est la suivante :

1. Calculer le polynôme caractéristique $p(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ et chercher les racines. On continue uniquement si toutes les racines sont dans $\mathbb{K}$. ce sont les valeurs propres de A.
2. On cherche le sous espace propre associée à chaque valeur propre. Si pour l'une des valeurs propres, la dimension de ce espace propre n'est pas égale le degré de multiplicité de la valeur propre, la matrice n'est pas diagonalisable. pour chaque sous espace propres, on trouve une base. Ce sont des vecteurs propres de A.
3. Si la dimension de chaque sous espace propre est bien égale à la degré de multiplicité correspondant, la matrice A est diagonalisable.
4. On fabrique la matrice de passage P en mettant les vecteurs propres trouvés comme des colonnes.
5. On calcule P^{-1}, et on fabrique la matrice diagonale D par la relation

$$D = P^{-1}AP.$$

1.5.4 Exemples de diagonalisation

Exemple 1.5.1. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. **Déterminons le polynôme caractéristique de A :**

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8) = (1-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-2).$$

   Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$, ce sont donc $1, -4$ et 2.

2. **Montrons que A est diagonalisable :**
   Nous venons de voir que A, matrice réelle d'ordre 3, admet trois valeurs propres réelles distinctes, cela prouve que A est diagonalisable.

3. **Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage :**
   Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

   On obtient le système

$$\begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z - x = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

   Donc

$$E_1 = \{(x,x,x); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (1,1,1) > .$$

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

   On obtient le système

$$\begin{cases} 2y - z = 2x \\ 3x - 2y = 2y \\ -2x + 2y + z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2}x \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$$

   Donc

$$E_2 = \left\{ (x, \frac{3}{4}x, -\frac{1}{2}x); \quad x \in \mathbb{R} \right\} =< (4,3,-2) > .$$

$$E_{-4} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ ooz \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 2y - z = -4x \\ 3x - 2y = -4y \\ -2x + 2y + z = -4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z + 4x = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -\frac{3}{2}x \end{cases}$$

Donc

$$E_{-4} = \left\{ (x, -\frac{3}{2}x, x); \quad x \in \mathbb{R} \right\} =< (2, -3, 2) > .$$

La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. **Calculons P^{-1} et déterminons la matrice diagonale D :**

On a

$$detP = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -30.$$

Donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{detP}\,{}^t(Co(P)) = \frac{1}{-30}\,{}^t\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.5.2. *Soit la matrice* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. **Déterminons le polynôme caractéristique de B :**

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2).$$

Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$, ce sont donc $1, 1+i$ et $1-i$.

2. **Montrons que B est diagonalisable :**
La matrice B n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique n'a pas toutes ses racines

dans $\mathbb{R}$, elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car c'est une matrice d'ordre 3 qui admet trois valeurs propres distinctes.

3. **Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage :**
Les trois sous-espaces propres distincts sont de dimension 1, il suffit de déterminer un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x + y - z = x \\ \qquad\quad y = y \\ \quad x + z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}.$$

Donc

$$E_1 = \{(0,y,y); \quad y \in \mathbb{R}\} =< (0,1,1) > .$$

$$E_{1+i} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1+i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x + y - z = (1+i)x \\ \qquad\quad y = (1+i)y \\ \quad x + z = (1+i)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -ix \end{cases}.$$

Donc

$$E_{1+i} = \{(x,0,-ix); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (1,0,-i) > .$$

$$E_{1-i} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x + y - z = (1-i)x \\ \qquad\quad y = (1-i)y \\ \quad x + z = (1-i)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = ix \end{cases}.$$

Donc

$$E_{1-i} = \{(x,0,ix); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (1,0,i) > .$$

La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}.$$

4. **Calculons P^{-1} et déterminons la matrice diagonale D :**

$$P^{-1} = \frac{1}{detP}\,{}^t(Co(P)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$

D'où

$$D = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.5.3. *Soit la matrice* $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. **Déterminons le polynôme caractéristique de C :**

$$P_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ajoute les trois dernières colonnes à la première pour obtenir $4-\lambda$ partout sur cette première colonne, on le met en facteur et on soustrait la première ligne à toutes les autres :

$$P_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda-4).$$

Les valeurs propres de A sont les racines de $P_C(\lambda)$, ce sont donc 4 (simple) et 0 (triple).

2. **Montrons que A est diagonalisable :**
On a $dimE_4 = 1$. D'autre par

$$E_0 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \quad C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=-x-y-z.$$

Donc

$$E_0 = \{(x,y,z,-x-y-z);\quad x,y,z\in\mathbb{R}\} =< (1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1) > .$$

Montrons que la famille $\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ *est libre. Soit* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *tels que*

$$\alpha(1,0,0,-1)+\beta(0,1,0,-1)+\gamma(0,0,1,-1)=(0,0,0,0).$$

On obtient que $\alpha=\beta=\gamma=0$*, donc la famille est libre alors elle forme une base de* E_0*. On a donc* $dim E_0 = 3$ *et égale le degré de multiplicité de la valeur propre* 0*. Donc C est diagonalisable.*

3. **Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage :**
On a la famille $\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ *est une base de* E_0*. Trouvons une base de* E_4 *:*

$$E_4 = \left\{ (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : \quad A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}\right\}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} -3x+y+z+t=0 \\ x-3y+z+t=0 \\ x+y-3z+t=0 \\ x+y+z-3t=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t.$$

Donc

$$E_4 = \{(x,x,x,x;\quad x\in\mathbb{R}\} =< (1,1,1,1) > .$$

La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. **Calculons P^{-1} et déterminons la matrice diagonale D :**

On a

$$detP = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_3 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{detP}{}^t(Co(P)) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$D = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$