

6 Écoulements de gaz parfait en conduit de section constante

De nombreuses applications pratiques mettent en jeu des écoulements de gaz comprimés dans des canalisations dont la section ne varie pas de valeur sur de grandes distances. C'est le cas par exemple des gazoducs, des conduits primaires d'alimentation de réseaux de vapeur ou de distribution de gaz... Dans ces situations, et bien que les fluides ne soient pas "parfaits", les phénomènes dissipatifs liés aux irréversibilités intrinsèques du fluide restent relativement négligeables dans le bilan énergétique vis-à-vis de modifications :

1. du bilan de quantité de mouvement, par la présence de frottement pariétal ;
2. du bilan d'enthalpie, par apport extérieur direct de chaleur.

Sous ces nouvelles hypothèses, les équations locales du mouvement permanent deviennent :

$$\text{Continuité :} \quad \frac{d\rho U}{dx} = 0 \quad (8-17)$$

$$\text{Dynamique :} \quad \rho U \frac{dU}{dx} = -\frac{dP}{dx} - \frac{\Lambda}{D} \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (8-18)$$

$$\text{Enthalpie :} \quad \rho C_p \frac{dT}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx} + \rho \frac{dQ}{dx} \quad (8-19)$$

$$\Lambda = - \frac{\Delta P}{\frac{1}{2} \rho U^2 \frac{L}{D}}$$

Dans les équations précédentes, D désigne le diamètre de la conduite supposée circulaire, Λ est le coefficient de perte de charge en ligne défini par l'équation (9-20) du chapitre IX, et dQ dénote l'apport de chaleur par unité de masse. Nous allons poursuivre l'étude de ces écoulements en discutant séparément des effets de frottement et d'apport de chaleur.

REMARQUE — Diamètre hydraulique équivalent — Si le conduit n'est pas de section circulaire, il suffit, pour utiliser les équations précédentes, de substituer au diamètre D le diamètre hydraulique équivalent $D_e = 4A/C$ où A est l'aire de la section droite du conduit et C son périmètre.

6.1 Écoulement de Fanno avec pertes de charges

6.1.1 Equations du mouvement

Nous considérons ici un écoulement sans apport extérieur de chaleur ($dQ = 0$). En introduisant le nombre de Mach, les équations locales du mouvement se mettent

sous la forme suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} = 0 \quad (8-20)$$

$$\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dP}{P} + \frac{dU}{U} + \frac{\Lambda}{2D} dx = 0 \quad (8-21)$$

$$\frac{1}{(\gamma - 1)M^2} \frac{dT}{T} + \frac{dU}{U} = 0 \quad (8-22)$$

DÉMONSTRATION — Divisant membre à membre l'équation de la dynamique par ρU^2 , il vient :

$$\frac{dU}{U} + \frac{dP}{\gamma P} \frac{a^2}{U^2} + \frac{\Lambda}{2D} dx = 0$$

où l'on a exprimé la masse volumique par $\rho = \gamma P/a^2$. Il suffit d'introduire le nombre de Mach $M = U/a$ pour aboutir à l'expression cherchée. Le traitement de l'équation de l'énergie est en tous points semblable.

6.1.2 Variations logarithmiques

A partir des relations précédentes, on peut expliciter les variations logarithmiques de toutes les fonctions de l'écoulement, ainsi que le coefficient de perte de charge en fonction de dM/M . Les résultats s'écrivent :

Vitesse :	$\frac{dU}{U} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$	(8-23a)
Pression :	$\frac{dP}{P} = -\frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$	(8-23b)
Température :	$\frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma - 1)M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$	(8-23c)
Masse volumique :	$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$	(8-23d)
Coefficient de perte de charge :	$\frac{\Lambda dx}{2D} = \frac{(1 - M^2)}{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)} \frac{dM}{M}$	(8-23e)

DÉMONSTRATION — Par définition du nombre de Mach, on peut poser $U^2 = \gamma r T M^2$ qui par différentiation logarithmique donne :

$$2 \frac{dU}{U} = \frac{dT}{T} + 2 \frac{dM}{M}$$

Par ailleurs, l'équation de l'énergie fournit $dT/T = (1 - \gamma)M^2 dU/U$. En éliminant dT/T entre ces deux équations, on obtient la première relation exprimant dU/U . La valeur de dT/T , comme celle de $d\rho/\rho$, s'en déduit immédiatement par usage de l'équation de continuité. Pour obtenir le coefficient de perte de charge, il suffit de substituer l'ensemble des expressions précédentes dans l'équation de la dynamique. Il vient ainsi :

$$\frac{1}{\gamma M^2} \left[\frac{-1 + (1 - \gamma)M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \right] \frac{dM}{M} + \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} + \frac{\Lambda}{2D} dx = 0$$

qui se réduit simplement à :

$$\frac{M^2 - 1}{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 \right)} \frac{dM}{M} + \frac{\Lambda}{2D} dx = 0$$

6.1.3 Variation d'entropie

Grâce aux résultats précédents, on peut expliciter la variation d'entropie de l'écoulement en fonction de la variation relative du nombre de Mach :

$$ds = r \frac{1 - M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} \quad (8-24)$$

DÉMONSTRATION — Partant de l'expression de Gibbs $Tds = dh - dP/\rho$ il vient pour un gaz parfait $ds = C_p dT/T - r dP/P$, soit, avec les expressions antérieures :

$$ds = -\frac{C_p(\gamma - 1)M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} + r \frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$

Remarquant que $(\gamma - 1)C_p = \gamma r$, on obtient après simplifications le résultat annoncé.

6.1.4 Discussion et interprétation physique

Nous pouvons préciser l'interprétation physique des résultats que nous venons d'établir à partir des éléments de discussion suivants.

a) Les expressions du coefficient de perte de charge et de la variation d'entropie montrent que ces grandeurs sont proportionnelles, puisqu'en effet :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{r\gamma M^2}{2D} \Lambda$$

Cette relation signifie que la chute de pression le long de la conduite n'est qu'une autre expression de la variation d'entropie, résultat qui généralise, au cas compressible, celui établi au chapitre IX-§6.1 pour le régime incompressible.

- b) La variation d'entropie le long de la conduite ne pouvant qu'être positive conformément au second principe, il résulte de l'expression trouvée pour ds que, pour $M < 1$, le nombre de Mach de l'écoulement ne peut que croître, alors que pour $M > 1$, il est obligatoirement décroissant.
- c) Le passage par $M = 1$ est incompatible avec les hypothèses du problème. En effet, pour cette valeur du nombre de Mach, le coefficient de perte de charge serait nul sauf à admettre une variation infinie de dM/dx , ce qui n'a pas de sens physique.

On peut donc retenir des deux points précédents que :

En présence de frottement pariétal, le régime d'écoulement d'un gaz compressible se conserve tout au long d'un conduit de section constante.

- Si le mouvement est subsonique, le nombre de Mach reste inférieur à l'unité, tout en augmentant continuellement le long du conduit.
- Si le mouvement est supersonique, le nombre de Mach reste supérieur à l'unité, tout en diminuant continuellement le long du conduit.

La conclusion que nous venons d'énoncer se visualise très simplement dans le plan $T-s$. Le graphe correspondant à un débit masse donné — courbe de Fanno — se présente comme l'indique la figure ci-contre.

Partant d'un état correspondant à un régime subsonique tel que (X) l'évolution ne peut se faire le long de la courbe de Fanno que dans le sens croissant de l'entropie (flèche a).

Pour un régime initialement supersonique tel que (Y), l'évolution se fera en revanche dans le sens de la flèche b.

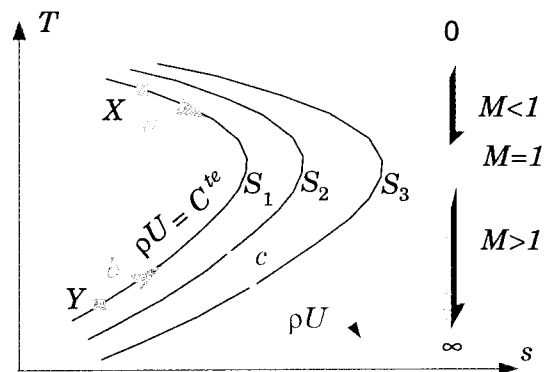


Fig. 12: Courbes de Fanno dans le diagramme $T-s$.

- d) Par intégration entre $x = 0$ ($M = M_0$) et $x = L$ ($M = M_L$) de l'expression donnant le coefficient de frottement, on obtient :

$$\frac{\Lambda L}{2D} = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{M_L^2} \right) + \frac{\gamma+1}{4\gamma} \text{Log} \left[\left(\frac{M_0}{M_L} \right)^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_L^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2} \right]$$

Puisque le nombre de Mach aval est, dans tous les cas de régimes, borné par $M = 1$, il existe une limite supérieure à la longueur de la conduite compatible avec les hypothèses du problème. Sa valeur L_{max} est donnée par :

$$\frac{L_{max}}{D} = \frac{1}{\Lambda\gamma} \left[\left(\frac{1}{M_0^2} - 1 \right) + \frac{\gamma+1}{2} \text{Log} \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2} \right) \right]$$

Concrètement, si la conduite dépasse la longueur maximale précédente, l'écoulement ne peut plus se poursuivre tout en satisfaisant l'équation de conti-

nuité $\rho U = C^{te}$. Dans le diagramme $T-s$ cela signifie que l'on a atteint un point tel que S_1 . Pour progresser au delà *en accord avec le second principe*, il faut passer à une autre courbe de Fanno telle que l'entropie continue d'augmenter. Comme le montre la figure précédente, cela ne peut se faire qu'en basculant sur un autre graphe pour lequel $\rho_2 U_2 < \rho_1 U_1$ (flèche c). En d'autres termes il n'y plus *conservation du débit masse*. D'où la conclusion suivante :

Il existe une longueur limite de la conduite sur laquelle le débit masse se conserve. La section limite de blocage correspond à des conditions soniques pour l'écoulement. Dans le cas où la conduite excède la longueur de blocage, l'écoulement se poursuit avec diminution du débit masse.

DÉMONSTRATION — L'intégration de l'équation exprimant le coefficient de perte charge s'obtient en décomposant préalablement la fraction rationnelle du second membre comme suit :

$$\frac{\Lambda dx}{2D} = \frac{1}{\gamma} \frac{dM}{M^3} - \frac{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$

On en déduit alors :

$$\frac{\Lambda L}{2D} = - \left[\frac{1}{2\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{4\gamma} \text{Log} \left(\frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \right) \right]_{M_0}^{M_L}$$

EXERCICE — Une conduite d'alimentation en air comprimé de section circulaire a un diamètre constant de 50 mm. Le nombre de Mach de l'écoulement en entrée de la conduite est de 0,2 et le coefficient de perte de charge vaut $\Lambda = 0,02$.

- 1) Calculer la longueur de blocage de débit L_{max} de la conduite.
- 2) On suppose que, pour une conduite de longueur L_{max} , l'écoulement débouche librement dans une atmosphère de pression statique constante $P_a = 10^5 \text{ N/m}^2$. Calculer la pression statique en entrée de la conduite.

SOLUTION

1) La longueur maximale de blocage de la conduite s'exprime avec les valeurs du problème par :

$$\frac{L_{max}}{D} = \frac{1}{0,028} \left[\left(\frac{1}{4 \cdot 10^{-2}} - 1 \right) + \frac{2,4}{2} \text{Log} \left(\frac{1,2 \times 4 \cdot 10^{-2}}{1 + 0,2 \times 4 \cdot 10^{-2}} \right) \right]$$

ce qui, tous calculs faits, donne $L_{max} \approx 36,3 \text{ m}$.

2) Remarquons que la différentielle logarithmique de la pression s'écrit :

$$-\frac{dP}{P} = \frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} \equiv \frac{1}{M} + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\gamma-1}{2}2M}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \right)$$

ayant pour intégrale indéfinie $\text{Log} \left(\frac{1}{P} \right) = \text{Log}(M) + \frac{1}{2} \text{Log} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 \right)$

Ainsi le rapport des pression statiques entre deux sections où $P = P_1$ et $P = P_2$ vaut :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}}$$

Appliquant la relation ci-dessus entre la section d'entrée ($P = P_1$) et la section de sortie où l'écoulement est sonique avec une pression statique adaptée à P_a , il vient :

$$\frac{P_a}{P_1} = M_1 \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}}}$$

Avec les valeurs du problème, on trouve $P_1 \approx 5,4 P_a = 5,4 \times 10^5 \text{ N/m}^2$.

6.2 Écoulement de Rayleigh avec transfert de chaleur

6.2.1 Équations du mouvement

Nous en venons à présent au second type d'écoulement en conduite de section constante destiné à analyser l'effet d'un apport de chaleur en l'absence de frottement. L'équation de la dynamique et celle de l'énergie s'écrivent dans ce cas :

$$\rho U dU + dP = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\gamma M^2} \frac{dP}{P} + \frac{dU}{U} = 0 \quad (8-25)$$

$$C_p dT = -U dU + dQ \quad (8-26)$$

6.2.2 Variations logarithmiques

A partir des relations précédentes, on peut établir que :

Vitesse :	$\frac{dU}{U} = \frac{1}{1 - M^2} \frac{dQ}{C_p T}$	(8-27a)
-----------	---	---------

Pression :	$\frac{dP}{P} = \frac{-\gamma M^2}{1 - M^2} \frac{dQ}{C_p T}$	(8-27b)
------------	---	---------

Température :	$\frac{dT}{T} = \frac{1 - \gamma M^2}{1 - M^2} \frac{dQ}{C_p T}$	(8-27c)
---------------	--	---------

Masse volumique :	$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-1}{1 - M^2} \frac{dQ}{C_p T}$	(8-27d)
-------------------	--	---------

Nombre de Mach :	$\frac{dM}{M} = \frac{1 + \gamma M^2}{2(1 - M^2)} \frac{dQ}{C_p T}$	(8-27e)
------------------	---	---------

Les expressions des différentielles logarithmiques en fonction de l'apport adimensionnel de chaleur $dQ/C_p T$ montrent clairement l'influence du nombre de Mach sur le sens de variation des différentes grandeurs. Nous allons discuter ce point au paragraphe 6.2.4 ci-après, non sans avoir fait remarquer ici que les expressions précédentes redonnent bien, pour la variation d'entropie, $ds = dQ/T$.

DÉMONSTRATION — L'équation de l'énergie donne :

$$\frac{dT}{T} = -U \frac{dU}{C_p T} + \frac{dQ}{C_p T} \equiv -\frac{U^2}{C_p T} \frac{dU}{U} + \frac{dQ}{C_p T}$$

Exprimant la température en fonction de la célérité du son, $T = a^2/\gamma r \equiv a^2/(\gamma - 1)C_p$ il vient :

$$\frac{dT}{T} = (\gamma - 1)M^2 \frac{dU}{U} + \frac{dQ}{C_p T}$$

Par ailleurs, la loi d'état permet d'écrire que $dT/T = dP/P - d\rho/\rho$. Or d'après l'équation de continuité $d\rho/\rho = -dU/U$ et avec l'équation de la dynamique on sait que $dP/P = -\gamma M^2 dU/U$. En substituant ces expressions dans la relation précédente, il vient :

$$\frac{dT}{T} = (1 - \gamma M^2) \frac{dU}{U}$$

L'élimination de dT/T conduit directement à l'expression cherchée pour dU/U dont les autres relations se déduisent aisément.

6.2.3 Relations entre sections

Les équations du mouvement peuvent également être intégrées entre deux sections de l'écoulement. L'intégration du bilan de quantité de mouvement est immédiate. Compte tenu de la condition de continuité elle amène directement à la conservation de la dynalpie, comme nous l'avons déjà vu au chapitre V-§5.2.3. On a donc :

$$P_1 + \rho_1 U_1^2 = P_2 + \rho_2 U_2^2$$

soit encore

$$P_1(1 + \gamma M_1^2) = P_2(1 + \gamma M_2^2)$$

Ainsi, on a finalement

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}} \quad (8-28)$$

A partir de la définition du nombre de Mach, on a en outre

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{U_2}{U_1} \times \frac{a_1}{a_2} \equiv \frac{U_2}{U_1} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Or, par continuité

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \equiv \frac{P_1}{P_2} \times \frac{T_2}{T_1}$$

En combinant cet ensemble de résultats, on aboutit à :

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{M_2}{M_1} \times \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2} \quad (8-29)$$

Dans ce type de mouvement, on peut définir une température d'arrêt *adiabatique* T_a par :

$$T_a = T + \frac{U^2}{2C_p} \equiv T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Comme l'écoulement n'est pas isentropique, cette température ne se conserve pas entre deux sections. En appliquant cette relation à deux sections distinctes il vient directement :

$$\boxed{\frac{T_{a2}}{T_{a1}} = \left(\frac{M_2}{M_1} \times \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right]} \quad (8-30)$$

6.2.4 Discussion et interprétation physique

Deux valeurs critiques du nombre de Mach se dégagent des expressions des variations logarithmiques :

1. la première s'obtient pour $M = 1$ et conduit à des variations infinies de tous les paramètres en présence d'un apport de chaleur non nul ;
2. la seconde $M = 1/\sqrt{\gamma}$ est spécifique de l'évolution de la température. Elle caractérise une situation où cette grandeur reste constante quel que soit l'apport de chaleur.

A partir de ces valeurs critiques, le sens de variation des diverses fonctions de l'écoulement peut être facilement obtenu et est donné dans le tableau suivant.

	M	0	\blacktriangleright	$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$	\blacktriangleright	1	\blacktriangleright	∞
U <i>ou</i> M		$dQ > 0$	\blacktriangleright		\blacktriangleright		\blacktriangleright	
		$dQ < 0$	\blacktriangleleft		\blacktriangleleft		\blacktriangleleft	
P <i>ou</i> ρ		$dQ > 0$	\blacktriangleleft		\blacktriangleleft		\blacktriangleleft	
		$dQ < 0$	\blacktriangleright		\blacktriangleright		\blacktriangleright	
T		$dQ > 0$	\blacktriangleright		\blacktriangleright		\blacktriangleright	
		$dQ < 0$	\blacktriangleleft		\blacktriangleleft		\blacktriangleleft	

Fig. 13: Sens de variation des différentes fonctions de l'écoulement avec apport de chaleur

De la lecture du tableau précédent, il ressort qu'en régime subsonique, tout apport de chaleur se traduit par une augmentation du nombre de Mach de l'écoulement.

En revanche, en régime supersonique, le chauffage provoque la diminution de ce paramètre. Ainsi, dans les deux cas, la tendance est de favoriser l'apparition des conditions soniques $M = 1$. Lorsque l'on en arrive à une telle situation on dit qu'il y a blocage thermique.

Une seconde observation peut être dégagée quant à l'évolution de la température. On constate en effet que tout apport (resp. retrait) de chaleur se traduit *naturellement* par une augmentation (resp. diminution) de la température, *sauf* pour des écoulements dont le nombre de Mach est compris entre $1/\sqrt{\gamma}$ et 1. Pour ceux-ci, l'*augmentation de vitesse* ("accélération" du fluide) se fait avec *diminution de température*.

Nous résumerons l'ensemble de ces observations sous les deux propositions suivantes :

- Sous les hypothèses de l'étude, tout apport de chaleur fait évoluer l'écoulement vers les conditions de blocage thermique $M = 1$;
- Le chauffage (resp. refroidissement) du fluide entraîne une augmentation (resp. diminution) de température quelle que soit la valeur du nombre de Mach de l'écoulement hors de la plage $[1/\sqrt{\gamma}, 1]$ sur laquelle la tendance est opposée.

Il est facile de représenter ces conclusions dans le diagramme $(T - s)$. En effet, on vérifie aisément que la variation d'entropie s'exprime bien évidemment dans ce cas par $ds = dQ/T$, de sorte que le déplacement dans le sens d'accroissement d'entropie se confond avec celui d'un apport de chaleur (chauffage). Dans le plan en question, la courbe d'évolution est alors la ligne de Rayleigh schématisée à la figure ci-contre.

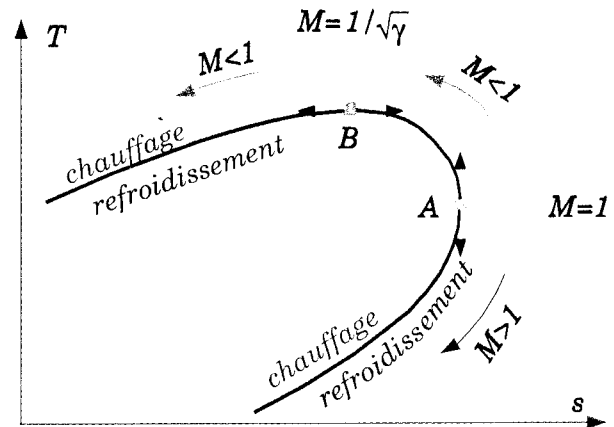


Fig. 14: Ligne de Rayleigh dans le plan $T - s$

DÉMONSTRATION — Avec les résultats antérieurs, on sait que :

$$\frac{dT}{T} = \frac{1 - \gamma M^2}{1 - M^2} \frac{dQ}{C_p T} \quad \text{et} \quad \frac{dP}{P} = \frac{-\gamma M^2}{1 - M^2} \frac{dQ}{C_p T}$$

Il suffit de remplacer ces expressions dans la relation de Gibbs $ds = C_p dT/T - rdP/P$ pour trouver, après simplifications, que la variation d'entropie est bien liée au seul apport de chaleur, les irréversibilités intrinsèques étant nulles en raison même des hypothèses du mouvement.