Chapitre4 : Caractéristiques géométriques des sections

1. Moments statiques

Soit une surface plane S dans le repère $(0,\vec{x},\vec{y})$ (figure 1), considérant sur cette surface un élément dS relative au point M. Le moment statique A_Δ de S par rapport à un axe Δ situé à une distance δ de M est défini par :

$$A_\Delta = \iint_S \delta.dS$$

Si Δ est confondu avec l'un des axes $(0,\vec{x})$ ou $(0,\vec{y})$ on obtient alors:

- le moment statique de la surface S par rapport à l'axe $(0,\vec{x})$

$$A_{Ox} = \iint_S y.dS$$

- le moment statique de la surface S par rapport à l'axe $(0,\vec{y})$

$$A_{Oy} = \iint_S x.dS$$

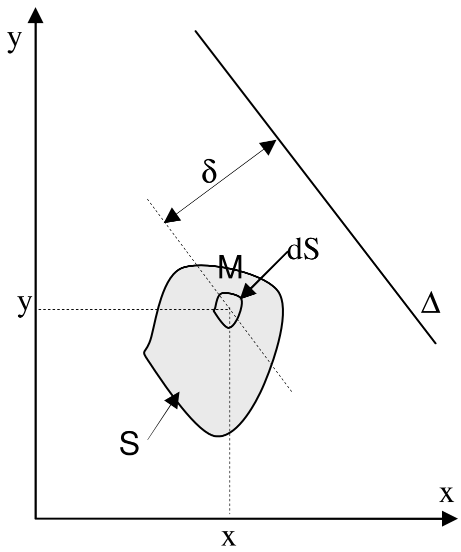


Figure 1

L'unité du moment statique est évidement le m^3

2. Centre de gravité

Le centre de gravité ou d'inertie de la surface S est le point G défini par ses coordonnées X_G et Y_G telles que:

$$X_G = \frac{A_{OY}}{S} = \frac{\iint_S x.dS}{S}$$

$$Y_G = \frac{A_{OX}}{S} = \frac{\iint_S y.dS}{S}$$

Si une surface S est composée d'un nombre n de surface S_i, on a alors:

$$X_G = \frac{\sum_1^n X_{Gi} \cdot S_i}{S} \quad \text{et} \quad Y_G = \frac{\sum_1^n Y_{Gi} \cdot S_i}{S}$$

avec: X_{Gi}: abscisse du centre de gravité G_i de la surface S_i
Y_{Gi}: ordonnée du centre de gravité G_i de la surface S_i

3. Moments quadratiques

Soit la surface plane S du repère $(0, \vec{x}, \vec{y})$ de la figure 1, Le moment quadratique (ou d'inertie) I_Δ de S par rapport à un axe Δ est défini par :

$$I_\Delta = \iint_S \delta^2 . dS$$

Si Δ est confondu avec l'un des axes $(0, \vec{x})$ ou $(0, \vec{y})$ on obtient alors:

- le moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe $(0, \vec{x})$

$$I_{OX} = \iint_S y^2 . dS$$

- le moment statique de la surface S par rapport à l'axe $(0, \vec{y})$

$$I_{Oy} = \iint_S x^2 . dS$$

L'unité du moment quadratique est évidement le m^4

Théorème de Huygens

Soit l'axe Δ' passant par le centre de gravité G de la surface S, le moment quadratique I_Δ est calculé à partir du moment quadratique $I_{\Delta'}$ par la formule :

$$I_\Delta = I_{\Delta'} + S \cdot d^2$$

avec : d : distance entre l'axe Δ et Δ'

Le théorème de Huygens appliqué aux axes $(0, \vec{x'})$ et $(0, \vec{y'})$ donne :

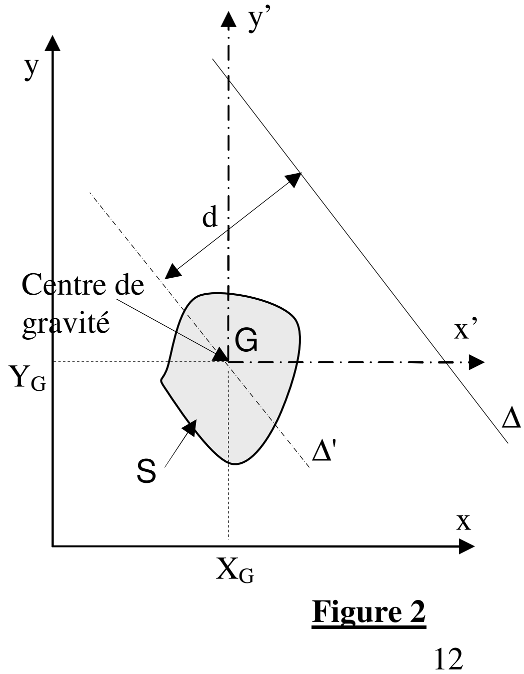


Figure 2

$$I_{Ox} = I_{Gx'} + S.Y_G^2$$

$$I_{Oy} = I_{Gy'} + S.X_G^2$$

Si une surface S est composée d'un nombre n de surface S_i, on a:

$$I_{Ox} = \sum_1^n I_{Oxi} \quad \text{et} \quad I_{Oy} = \sum_1^n I_{Oyi}$$

avec: I_{Oxi}: moment quadratique de la surface S_i par rapport à l'axe $(0, \vec{x})$

I_{Oyi}: moment quadratique de la surface S_i par rapport à l'axe $(0, \vec{y})$

4. Moment quadratique polaire

Le moment quadratique polaire d'une surface S par rapport à un point est définit par :

$$I_p = \int_S r^2 .ds$$

On trouve après intégration les expressions de I_p pour les sections les plus utilisées (tableau ci-contre):

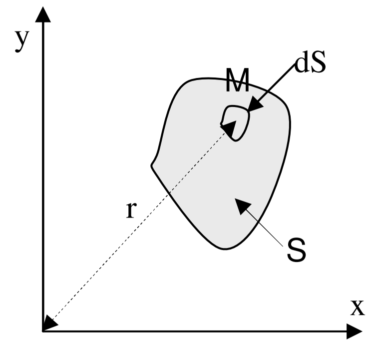
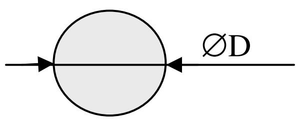
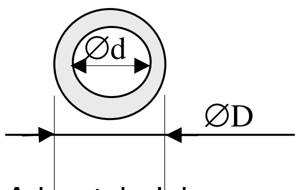


Figure 3

Section	I_p
 Arbre plein	$\dfrac{\pi D^4}{32}$
 Arbre tubulaire	$\dfrac{\pi (D^4 - d^2)}{32}$