

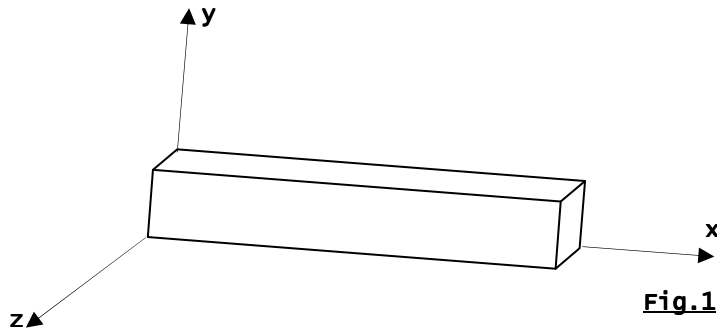
## CHAPITRE 2 : TORSEUR DE COHÉSION ET NOTION DE CONTRAINTE

### 1. TORSEUR DE COHÉSION

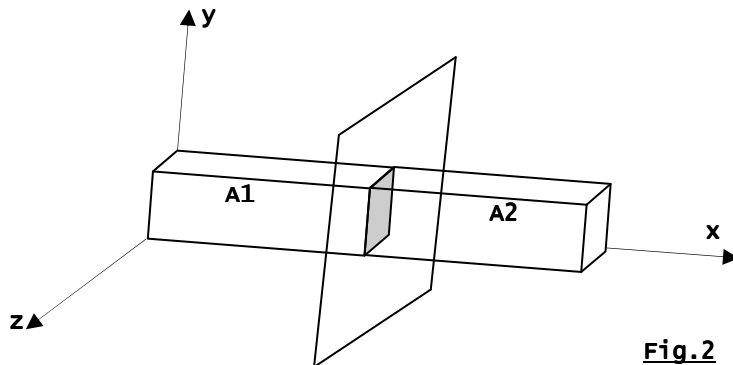
#### 1.1. DÉFINITION

Dans ce qui suit on considère que les notions énoncées dans le chapitre 1 sont acquises.

Considérons une poutre en équilibre sous l'effet d'efforts extérieurs (fig.1).



Effectuons virtuellement une coupure dans cette poutre (fig.2) et analysons l'équilibre des deux tronçons obtenus.



Les tronçons A1 et A2 exercent l'un sur l'autre des actions qui maintiennent la cohésion entre les deux parties (fig.3). Ces actions peuvent être représentées par un torseur appelé torseur des efforts intérieurs ou torseur de cohésion  $\{\tau_i\}$ .

Pour rendre compte de ce torseur choisissons une convention de signe :

$$\{\tau_i\} = \{\tau_{(A2 \rightarrow A1)}\} = -\{\tau_{(A1 \rightarrow A2)}\}$$

Avec :  $\{\tau_{(A2 \rightarrow A1)}\}$  le torseur des efforts exercés par la partie A2 sur la partie A1 et

$\{\tau_{(A1 \rightarrow A2)}\}$  le torseur des efforts exercés par la partie A1 sur la partie A2.

Exprimons ce torseur en utilisant le principe fondamental de la statique. Appliquons ce principe au tronçon A1 :  $\{\tau_{(A_{ext} \rightarrow A1)}\} + \{\tau_{(A2 \rightarrow A1)}\} = \{0\}$  ou  $\{\tau_{(A_{ext} \rightarrow A1)}\} + \{\tau_i\} = \{0\}$

Avec  $\{\tau_{(A_{ext} \rightarrow A1)}\}$  le torseur des efforts extérieurs sur le tronçon A1.

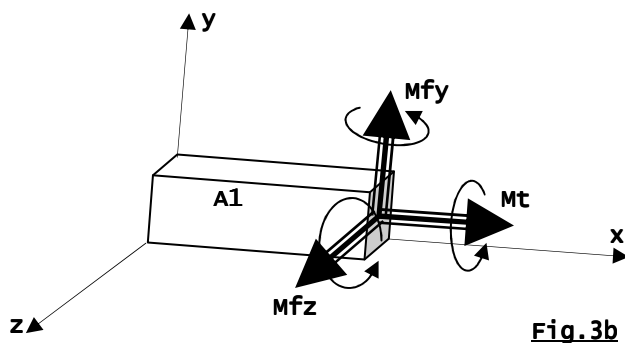
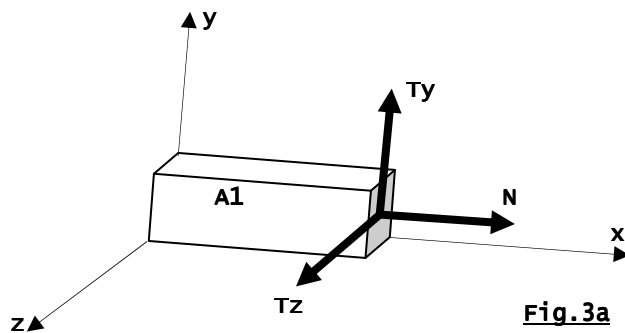
On déduit de ça que  $\{\tau_i\} = -\{\tau_{(A_{ext} \rightarrow A1)}\}$

Le même principe appliqué au tronçon A2 donne :  $\{\tau_i\} = \{\tau_{(A_{ext} \rightarrow A2)}\}$

## 1.2. COMPOSITION DU TORSEUR DE COHÉSION

La liaison entre le tronçon A1 et A2 est supposée parfaite elle est donc modélisé par un encastrement. Le torseur de cohésion prend alors la forme la plus générale (fig. 3a)et (fig.3b):

$$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} N & M_f \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}$$



**Avec :**

- N, effort normal : force de direction tangente à la courbe moyenne ;
- T, effort tranchant : force perpendiculaire à la courbe moyenne et provoquant un cisaillement:
  - $T_y$  : effort tranchant selon y,
  - $T_z$  : effort tranchant selon z ;
- $M_f$ , moment fléchissant : moment dont le vecteur est perpendiculaire à la courbe moyenne et provoquant une flexion :
  - $M_{fy}$  : effort tranchant selon y,
  - $M_{fz}$  : effort tranchant selon z ;
- $M_t$ , moment de torsion : son vecteur a pour direction x.

### 1.3. CAS PARTICULIERS DU TORSEUR DE COHÉSION

Dans la pratique, le tenseur de cohésion est plus simple car plusieurs de ses composantes sont nulles, on est alors en présence de sollicitations élémentaires qui seront traitées en détail dans les chapitres suivants et dont on présente ci-après un résumé.

<b>Torseur de cohésion</b>	<b>Nature des sollicitations</b>	<b>Valeurs des composantes</b>			
		<b>Effort Normal</b>	<b>Effort Tranchant</b>	<b>Moment de Torsion</b>	<b>Moment de Flexion</b>
$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Traction (N>0)  Compression (N<0)	<b>N≠0</b>	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$
$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$	Cisaillement simple	N=0	<b><math>T_y \neq 0</math> ou/et <math>T_z \neq 0</math></b>	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$
$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Torsion simple	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	<b><math>M_t \neq 0</math></b>	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$
$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$	Flexion pure	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	<b><math>M_{fy} \neq 0</math> ou/et <math>M_{fz} \neq 0</math></b>

### 1.4. DIAGRAMMES

Le tenseur de cohésion est modifié lorsque la coupure se déplace le long de la poutre. On étudie alors plusieurs coupures en particulier lorsqu'on rencontre : une discontinuité d'ordre géométrique (changement de direction de la ligne moyenne) ou une discontinuité liée à des efforts concentrés ou à une liaison.

Le tracé des différentes valeurs prises par une composante du tenseur de cohésion le long de la ligne moyenne de la poutre en fonction de la position de la coupure est appelé diagramme. Le tracé des diagrammes permet de localiser les sections les plus sollicitées de la poutre et par conséquent de dimensionner la poutre pour résister aux efforts extérieurs, c'est l'un des objectifs de la RDM.

## 2. NOTION DE CONTRAINTE

### 2.1. DÉFINITION

Le tenseur de cohésion défini précédemment est une entité globale de la section considérée de la poutre et ne rend pas compte de la répartition locale des efforts sur cette section. Considérons un point M de cette section et notons  $\Delta S$  un élément de surface de normale  $\vec{n}$  entourant ce point (fig.4).

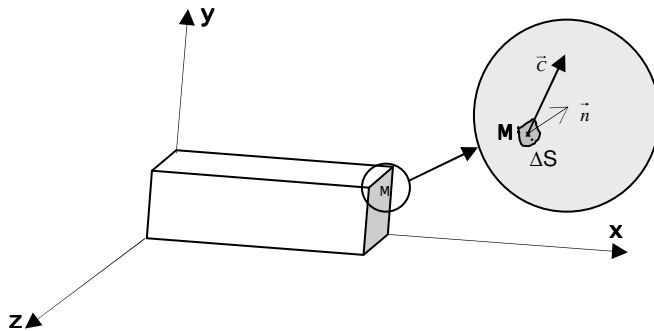


Fig.4

Soit  $\Delta \vec{f}$  l'action qui s'exerce sur  $\Delta S$ . on définit le **vecteur contrainte** au point M

relativement à  $\Delta S$  : 
$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta S} = \frac{d\vec{f}}{dS}$$

L'unité du vecteur contrainte est le rapport d'une force par une unité de surface soit des  $N/m^2$  ou Pa, avec  $1 Pa = 1N/m^2$ . Le Pa étant une petite unité, un multiple du Pa est souvent utilisé en mécanique et en génie civil: le MPa avec  $1MPa = 10^6 Pa = 1N/mm^2$ . On a aussi  $1 bar = 10^5 Pa$ .

### 2.2. CONTRAINTE NORMALE ET TANGENTIELLE

La projection du vecteur contrainte  $\vec{C}$  sur la normale  $\vec{n}$  et sur la surface  $\Delta S$  donne deux vecteurs (fig.5) respectivement appelés :

Vecteur contrainte normale  $\vec{\sigma}$  : projection de  $\vec{C}$  sur  $\vec{n}$

Vecteur contrainte tangentielle  $\vec{\tau}$  : projection de  $\vec{C}$  sur  $\vec{t}$

On a évidemment : 
$$\vec{C} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$$

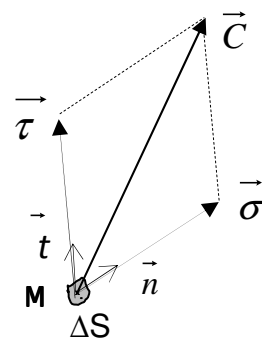


Fig.5