

ANALYSE NUMERIQUE

Deuxième année M.I.

Prof. HAMRI NASR-EDDINE

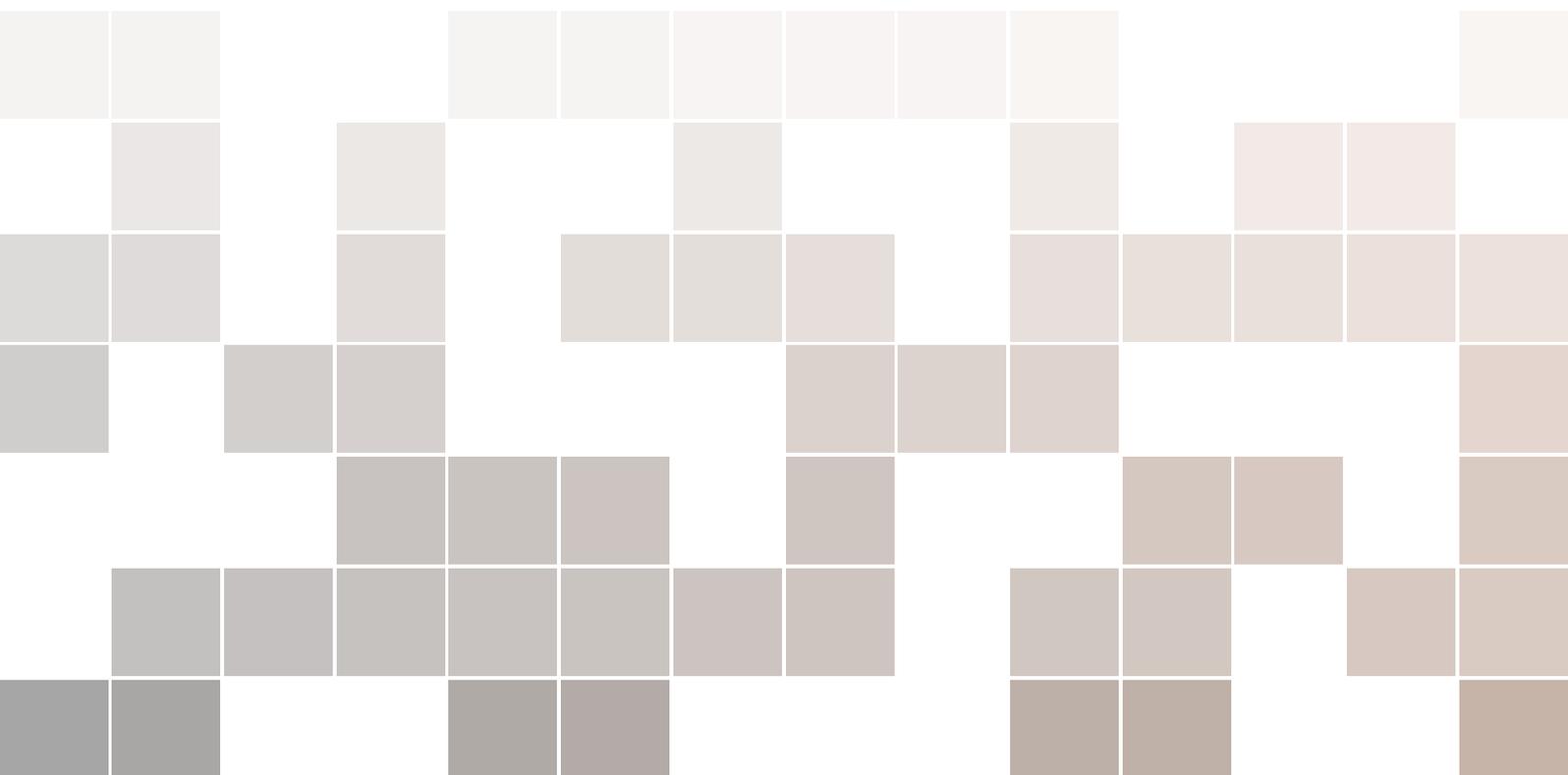


Table des matières

I	ANALYSE NUMERIQUE 2	
1	RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE	7
1.1	METHODES DIRECTES	7
1.1.1	Rappel	7
1.1.2	Systèmes linéaires	7
1.1.3	Résolution d'un système triangulaire supérieur	8
1.2	Méthode de Gauss	9
1.2.1	Interprétation matricielle de la méthode de Gauss	11
1.3	Méthodes LU	12
1.3.1	Décomposition LU	12
1.4	Méthode de Cholesky	13
1.4.1	Factorisation de Cholesky	14
1.4.2	Algorithme de décomposition de Cholesky	15
1.5	SERIE D'EXERCICES	17
1.6	METHODES INDIRECTES	17
1.6.1	Les méthodes itératives	18
1.6.2	Différentes décomposition de A	18
1.6.3	Méthode de Jacobi	19
1.6.4	Méthode de Gauss-Seidel	19
1.6.5	Méthode de relaxation	20
1.7	Convergence des méthodes itératives	20
1.7.1	Cas général	20
1.8	SERIE D'EXERCICES	23



ANALYSE NUMERIQUE 2

1	RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE ... 7
1.1	METHODES DIRECTES
1.2	Méthode de Gauss
1.3	Méthodes LU
1.4	Méthode de Cholesky
1.5	SERIE D'EXERCICES
1.6	METHODES INDIRECTES
1.7	Convergence des méthodes itératives
1.8	SERIE D'EXERCICES

1. RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE

1.1 METHODES DIRECTES

1.1.1 Rappel

Rang d'une matrice

Définition 1.1.1 Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de m lignes et de n colonnes. Le rang de A est égal au nombre maximum de colonnes de A linéairement indépendant et on le note :

$$\text{rang } A$$

Le rang de A est donc aussi égal à la dimension de l'image de toute application linéaire représenté par A .

Proposition 1.1.1 - $\text{rang } A = \text{rang } A^t$ - si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ alors $\text{rang } A \leq \inf(m,n)$ - si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors A inversible $\Leftrightarrow \text{rang } A = n$.

Définition 1.1.2 Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, on appelle matrice extraite de A une matrice obtenue par sélection de lignes et de colonnes. Par exemple si I (respectivement J) est un sous ensemble de $\{1, 2, \dots, m\}$ (respectivement $\{1, 2, \dots, n\}$) on définit une matrice extraite B de A par :

$$B = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$$

Théoreme 1.1.2 Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de rang r alors :

- le rang de toute matrice extraite de A est inférieur ou égal à r ,
- toute matrice carrée inversible extraite de A est d'ordre inférieur ou égal à r ,
- il existe une matrice carrée extraite de A d'ordre r qui est inversible.

1.1.2 Systèmes linéaires

Définition 1.1.3 On appelle système de m équations à n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n la famille

alors le système admet une solution unique et cette solution x^* est telle que :

$$x_k^* = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}x_j^*}{a_{kk}}, \quad k = \{n, n-1, \dots, 1\} \quad (1.2)$$

Nous allons étudier les méthodes de résolution du système de n équations linéaires à n inconnues $Ax = b$, par les méthodes directes. Nous entendons par méthodes directes des méthodes qui mènent à la solution en un nombre fini d'opérations élémentaires. Ces méthodes sont utilisées seulement si le nombre d'équations du système n'est pas trop élevé (généralement $n \leq 100$). La méthode de Cramer en est une, mais elle est numériquement inacceptable. Car sa mise en oeuvre demande le calcul de $n+1$ déterminants et n divisions. Pour calculer chaque déterminant, nous devons effectuer $n!n$ multiplications et $n!-1$ additions soit un total de $(n+1)^2n!-1$ opérations élémentaires. Par exemple, pour $n=5$ on obtient 4319 opérations élémentaires. Pour $n=10$ on obtient à peu près 4.10^8 opérations élémentaires. Or, dans la pratique, nous aurons à résoudre des systèmes d'ordres $n=100$, $n=1000$ voire même plus. Il est donc impossible de résoudre de tels systèmes par la méthode de Cramer. Dans ce chapitre, nous présentons essentiellement la méthode d'éliminations successives de Gauss et son interprétation matricielle, laquelle débouche sur la méthode de Cholesky pour un système à matrice définie positive.

Si la matrice A n'est plus triangulaire, nous sommes amenés à chercher une matrice M inversible telle que la matrice produit MA soit triangulaire. On résoudra alors le système :

$$MAx = Mb$$

par l'algorithme (1.2). Nous nous limitons bien entendu à des systèmes $Ax = b$ avec $\det A \neq 0$.

1.2 Méthode de Gauss

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée donnée et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche x^* solution du système linéaire :

$$Ax = b$$

La méthode de Gauss consiste à construire un système équivalent plus facile à résoudre (à matrice triangulaire supérieure par exemple). Deux systèmes linéaires définis par deux matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $U \in M_n(\mathbb{R})$ sont dits équivalents si leurs solutions sont identiques.

- R** - Les transformations élémentaires suivantes appliquées à un système linéaire engendrent un système linéaire équivalent :
 - Une équation peut être remplacée par cette même équation à laquelle on ajoute ou on retranche un certain nombre de fois une autre ligne.
 - La multiplication d'une équation par une constante non nulle.
 - La permutation de deux lignes ou de deux colonnes.

La représentation d'un système linéaire peut se faire à travers une matrice de dimension $n.(n+1)$ appelé matrice augmentée. La matrice est noté $\tilde{A} = [A|b]$ et a pour forme générale :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

La résolution du système linéaire ayant pour matrice augmentée \tilde{A} peut se faire en appliquant des transformations élémentaires permettant d'obtenir un système équivalent.

L'objectif de l'algorithme de Gauss est la construction d'un système triangulaire supérieur équivalent, en annulant au fur et à mesure les termes en dessous de la diagonale.

Définition 1.2.1 On appelle pivot de la transformation, l'élément a_{kk} de la matrice utilisée pour annuler les termes a_{jk} , $j > k$. La ligne k est alors appelée ligne pivot.

Théoreme 1.2.1 Soit un système linéaire défini par une matrice A d'ordre n et $b \in \mathbb{R}^n$. Si A est non singulière alors il existe une matrice U d'ordre n triangulaire supérieure et $y \in \mathbb{R}^n$ tels que $Ux = y$ soit équivalent à $Ax = b$. La résolution du système $Ax = b$ se fait ensuite par résolution du système triangulaire supérieur.

Démonstration. Construisons la matrice augmentée $\tilde{A}^{(1)} = [A^{(1)}|b^{(1)}]$

$$\tilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right)$$

l'exposant indiquant le nombre de fois qu'une valeur a été stockée à la location i, j donnée. La première étape de l'algorithme de Gauss est d'annuler l'ensemble des coefficients de la première colonne en dessous de la diagonale. Cela s'obtient si $a_{11} \neq 0$ en réalisant la transformation suivante sur la ligne $i > 1$:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad j \in [1, n+1]$$

où $g_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, on obtient le système équivalent à l'étape 2 suivant donné par sa matrice augmentée :

$$\tilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right)$$

les étapes suivantes consistent à refaire le même procédé pour les colonnes suivantes. Ainsi l'étape k consiste à éliminer l'inconnu x_k dans les équations $k+1, \dots, n$. Ce qui donne les formules suivantes définies pour les lignes $i = k+1, \dots, n$ en supposant que le $k^{\text{ième}}$ pivot $a_{kk}^{(k)} \neq 0$:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - g_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad j \in [k, n+1] \quad (1.3)$$

avec $g_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$. A la dernière étape c'est-à-dire à $k = n$, on obtient le système équivalent suivant :

$$\tilde{A}^{(n)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1}^{(n-1)} & a_{n-1n}^{(n-1)} & \cdots & b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & & b_n^{(n)} \end{array} \right)$$

la matrice U est donc définie comme étant la matrice $\tilde{A}^{(n)}$ et y le vecteur $b^{(n)}$. ■

- R** - La ligne i de la matrice $\tilde{A}^{(k)}$ n'est plus modifiée par l'algorithme dès lors que $i \leq k$. - A l'étape k , on pratique l'élimination sur une matrice de taille $n - k + 1$ lignes et $n - k + 2$ colonnes.
- R** Si lors de l'élimination l'élément $a_{kk}^{(k)}$ à l'étape k est nul alors la ligne k ne peut pas être utilisée comme ligne pivot. Dans ce cas, on cherche une ligne $j > k$ telle $a_{jk}^{(k)} \neq 0$. Si une telle ligne existe, alors on permute la ligne j et la ligne k sinon le système n'admet pas de solution.
- R** Pour minimiser les erreurs d'arrondi, on choisit la valeur du pivot la plus grande en valeur absolue. Pour ce faire deux stratégies sont possibles :
1. La méthode dite à *pivot partiel* : Au $k^{\text{ième}}$ pas de l'élimination, on choisit comme ligne de pivot celle qui, parmi les $n - k + 1$ restantes, a l'élément de module maximum en colonne et on permute dans $\tilde{A}^{(k)}$ la $k^{\text{ième}}$ ligne naturelle et celle qui réalise ce maximum.
 2. La méthode dite à *pivot total* : Au $k^{\text{ième}}$ pas de l'élimination, on choisit comme pivot l'élément de plus grand module dans la matrice d'ordre $n - k + 1$ restante. On permute donc dans $\tilde{A}^{(k)}$ la $k^{\text{ième}}$ colonne naturelle et celle du pivot, ce qui modifiera l'ordre des composantes du résultat. A la fin du processus, il ne faudra pas oublier de remettre dans l'ordre initial les composantes de la solution x .

1.2.1 Interprétation matricielle de la méthode de Gauss

Supposons que l'on puisse effectuer l'élimination sans permutation des lignes et des colonnes. Considérons alors les matrices

$$G^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & -g_{k+1k} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -g_{nk} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

avec

$$g_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad \text{pour } i = k+1, \dots, n.$$

le système (1.3) peut se mettre sous la forme

$$\tilde{A}^{(k+1)} = G^{(k)} \tilde{A}^{(k)}$$

ce qui donne

$$\tilde{A}^{(n)} = G^{(n-1)} \cdot G^{(n-2)} \cdot G^{(n-3)} \cdots G^{(1)} \cdot \tilde{A}^{(1)}$$

avec

$$\tilde{A}^{(n)} = [A^{(n)} | b^{(n)}]$$

Posons

$$U = A^{(n)}$$

$$L = \left(G^{(n-1)} \cdot G^{(n-2)} \cdot G^{(n-3)} \cdots G^{(1)} \right)^{-1}$$

U (pour Upper) est une matrice triangulaire supérieure et L (pour Lower) est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité. Donc nous avons écrit A sous la forme : $A = LU$ où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ g_{21} & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ g_{31} & g_{32} & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ g_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1n-1}^{(n-1)} & a_{n-1n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

nous sommes donc amenés à résoudre successivement les deux systèmes triangulaires :

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \quad \text{où } y = b^{(n)}$$

1.3 Méthodes LU

La première phase de la méthode de Gauss consistait à transformer le système $Ax = b$ en un système triangulaire $Ux = y$ avec U une matrice triangulaire supérieure. Supposons qu'aucune permutation n'ait été effectuée, on peut alors montrer que U et y ont été obtenus à partir de A et b en les multipliant par une même matrice R triangulaire et inversible, c'est-à-dire

$$U = RA \quad \text{et} \quad y = Rb$$

on a donc $A = R^{-1}U$. Et si on pose $L = R^{-1}$ et $U = R$, on peut donc décomposer A en un produit de matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U . La méthode de Gauss appartient donc à la classe des méthodes dites méthodes LU . Elles consistent à obtenir une décomposition de la matrice A du type LU et à résoudre le système triangulaire $Ly = b$ puis ensuite le système triangulaire $Ux = y$ (L et U étant supposées inversibles).

$$Ax = b \iff LUx = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

1.3.1 Décomposition LU

Définition 1.3.1 Une matrice A non singulière, admet une factorisation triangulaire si il existe une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que :

$$A = LU$$

Théoreme 1.3.1 Soit le système linéaire $Ax = b$, si au cours de l'élimination de Gauss de la matrice A , aucun pivot n'est nul alors il existe une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que :

$$A = LU$$

si de plus on impose $l_{kk} = 1$ alors la factorisation est unique.

La matrice U s'obtient en appliquant la méthode de Gauss tandis que la matrice L s'écrit de la manière suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

où pour $i > 1$ on a $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$. Ainsi la matrice L est composée des facteurs multiplicatifs permettant d'annuler les éléments sous le pivot. Comme il existe des problèmes simples pour lesquelles un des pivots est nul, le théorème suivant permet d'étendre la factorisation LU à un cadre plus général.

Théorème 1.3.2 Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A inversible puisse se factoriser sous la forme $A = LU$ est que $\det(A_k) \neq 0, \forall k = 1, 2, \dots, n-1$. Où $A_k = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,k \\ j=1,2,\dots,k}}$.

Démonstration. 1) Si $A = LU, A_k = L_k U_k$ et si A est inversible, $\det U = \prod_{i=1}^n u_{ii} = \prod_{i=1}^n a_{ii}^{(i)} \neq 0$. Donc $\det(A_k) = \det(L_k) \cdot \det(U_k) = \det(U_k) = \prod_{i=1}^k a_{ii}^{(i)} \neq 0$. 2) Supposons que $\det(A_k) \neq 0 \forall k = 1, 2, \dots, n-1$. Cela est vrai en particulier pour $k = 1$, donc $a_{11}^{(1)} = \det(A_1)$ et la première étape de l'élimination de Gauss est possible. Par récurrence, si on a obtenu $A^{(k)}$ pour $k \leq n-1$

$$A^{(k)} = G^{(k-1)} \cdot G^{(k-2)} \cdot G^{(k-3)} \dots G^{(1)} \cdot A^{(1)}$$

alors $\det(A_k^{(k)}) = \det(G_k^{(k-1)}) \dots \det(G_k^{(1)}) \det(A^{(1)}) = \det(A^{(1)}) \neq 0$ $A_k^{(k)}$ étant triangulaire on a $\prod_{i=1}^k a_{ii}^{(i)} \neq 0$ donc $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, donc la $k^{\text{ième}}$ étape de l'élimination est possible. On obtiendra finalement $A=LU$. ■

Théorème 1.3.3 — méthode à pivot partiel. Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible, alors il existe une matrice de permutation P telle que les pivots de PA soient non nuls. Ainsi il existe deux matrices L et U telles que $PA = LU$.

R le système linéaire $Ax = b$ est équivalent au système $PAx = Pb$ et la résolution du système se fait selon les étapes suivantes :

1. Construire U, L et P ,

1. Calculer Pb ,
2. Résoudre $Ly = Pb$ (système triangulaire inférieur),
3. Résoudre $Ux = y$ (système triangulaire supérieur).

1.4 Méthode de Cholesky

Certains systèmes présentent des propriétés particulières. Les matrices associées à ces systèmes peuvent être symétriques, à bande, etc...La méthode de cholesky a pour but la résolution de systèmes linéaires pour lesquels la matrice associée est symétrique définie positive.

Définition 1.4.1 — Matrice symétrique. Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que A est symétrique si on a

$$A = A^t.$$

Définition 1.4.2 — Matrice définie positive. Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que A est définie positive si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq 0, \quad \langle Ax, x \rangle > 0$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^n . C'est-à-dire :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

On définit la norme induite par :

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.4.1 Si A est une matrice symétrique définie positive alors :

1. $a_{ii} > 0$,
2. $a_{ij} < a_{ii}a_{jj} \quad \forall i \neq j$,
3. $\max_{j,k} |a_{jk}| < \max_i |a_{ii}|$.

Théorème 1.4.2 Si la matrice A est une matrice carrée définie positive alors elle est inversible.

Corollaire 1.4.3 Si la matrice A est une matrice carrée définie positive alors le système linéaire $Ax = b$ où $x, b \in \mathbb{R}^n$ admet une solution et une seule.

Théorème 1.4.4 Soit M une matrice carrée telle et non singulière alors la matrice $A = MM^t$ est symétrique définie positive.

■ **Exemple 1.1** Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$A = MM^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est définie positive. ■

1.4.1 Factorisation de Cholesky

Théorème 1.4.5 Soit A une matrice carrée d'ordre n symétrique définie positive, A peut alors se décomposer et de manière unique en

$$A = LL^t$$

où L est une matrice triangulaire inférieure avec des éléments diagonaux positifs.

Ainsi ce théorème permet de déduire que la méthode de construction des matrices définies positives engendre en fait l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Si A est une matrice symétrique définie positive alors le système $Ax = b$ peut être décomposé en $LL^t x = b$ et ce système peut se résoudre en résolvant les systèmes triangulaires :

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

1.4.2 Algorithme de décomposition de Cholesky

Soit A une matrice symétrique définie positive alors on a $A = LL^t$. Pour résoudre le système

$$Ax = b \tag{1.4}$$

le théorème précédent nous permet d'écrire (1.4) sous la forme $LL^t x = b$ avec L une matrice triangulaire inférieure inversible. On est donc amené à résoudre

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

Le problème consiste donc à construire explicitement la matrice $L = (l_{ij})$ triangulaire inférieure telle que

$$A = LL^t \quad \text{où } A = (a_{ij})$$

ce qui équivaut à

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} l_{jk}, \quad j \leq i.$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

en remarquant que a_{ij} est le produit de la ligne i de L et la colonne j de L^t alors on a :

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{1k} = l_{i1} l_{11} + l_{i2} l_{12} + \cdots + l_{in} l_{1n} = l_{i1} l_{11}$$

en particulier pour $i = 1$, on a $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ (l_{11} est bien positif). la connaissance de l_{11} permet de construire la première colonne de la matrice L car :

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$$

En raisonnant de la même manière pour la deuxième colonne de L , on a :

$$a_{i2} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{2k} = l_{i1} l_{21} + l_{i2} l_{22}$$

en prenant $i = 2$ alors $a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2$. D'où l'on tire

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

ensuite on a :

$$l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1}l_{21}}{l_{22}} \quad i = 3, 4, \dots, n$$

On peut généraliser la procédure au calcul de la colonne j en supposant que les $(j - 1)$ colonnes ont déjà été calculé e. Ainsi :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik}l_{kj} = l_{ij}l_{j1} + l_{ij}l_{j2} + \dots + l_{ik}l_{jk} + \dots + l_{in}l_{jn}$$

et seul l_{ij} et l_{jj} ne sont pas connus. Si on pose $i = j$, on obtient :

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

et par conséquent

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}} \quad i > j \quad \begin{array}{l} j = 2, \dots, n \\ i = j + 1, \dots, n \end{array}$$

R La décomposition de A symétrique définie positive, sous la forme $A = LL'$ est unique à une matrice diagonale unité près. C'est-à-dire si $A = LL' = MM'$, alors $M = DL$ avec D matrice diagonale telle que $d_{ii} = \pm 1$.

R La méthode de Cholesky permet de calculer $\det A$ par

$$\det A = \prod_{i=1}^n l_{ii}^2$$

1.5 SERIE D'EXERCICES

Exercice 1.1 Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 & = & 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 15 \end{cases}$$

1. En appliquant les formules de Cramer.
2. En triangularisant la matrice du système associée par la méthode de Gauss.

Exercice 1.2 Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 & = & 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 & = & 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 & = & 0 \end{cases}$$

En appliquant le principe de triangularisation de Gauss.

Exercice 1.3 Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = & 2 \\ 5x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 14x_3 & = & 5 \end{cases}$$

1. Montrer que la matrice associée à ce système est définie positive.
2. Résoudre ce système en utilisant la méthode de Choleski.

Exercice 1.4 Soit les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 + 5x_2 & = & 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = & -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 2 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 & = & -2 \end{cases}$$

Effectuer la résolution en mettant, si cela est possible, la matrice associée à chacun de ces deux systèmes, sous forme d'un produit de deux matrices triangulaires de structures différentes.

1.6 METHODES INDIRECTES

Introduction

Les méthodes directes de résolution de systèmes linéaires fournissent une solution x au problème $Ax = b$ en un nombre fini d'opérations. Si l'ordre n de la matrice A est élevé, le nombre d'opérations est aussi élevé et de plus, le résultat obtenu n'est pas rigoureusement exact. Par ailleurs, il existe des cas où les structures du système linéaire ne sont pas tirés à profit par les méthodes directes. C'est par exemple le cas des systèmes où la matrice A est très creuse. C'est la raison pour laquelle, dans ce cas, on préfère utiliser des méthodes itératives. L'objectif est de construire une suite de

vecteurs $\{x^{(k)}\}_{k=1,2,\dots,n}$ qui tend vers un vecteur \bar{x} , solution exacte du problème $Ax = b$. Souvent, on part d'une approximation $\{x^{(0)}\}$ de \bar{x} obtenue en général par une méthode directe.

1.6.1 Les méthodes itératives

L'objectif est de résoudre un système du type $Ax = b$. Pour cela, nous allons décomposer la matrice A en

$$A = M - N$$

de sorte que M soit inversible. Ainsi, le système devient :

$$Mx = Nx + b$$

et nous chercherons par récurrence une suite de vecteurs $x^{(i)}$ obtenu à partir d'un vecteur $x^{(0)}$ et de la relation

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

c'est-à-dire

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Cette relation est une relation de récurrence du premier ordre. Nous pouvons en déduire une relation reliant l'erreur $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$ à $e^{(k-1)} = x^{(k-1)} - \bar{x}$:

$$M(x^{(k)} - \bar{x}) = N(x^{(k-1)} - \bar{x})$$

puisque $M\bar{x} = N\bar{x} + b$ et donc $e^{(k)} = M^{-1}Ne^{(k-1)}$ pour $k = 1, 2, \dots$ Si on pose $B = M^{-1}N$, nous avons alors

$$e^{(k)} = Be^{(0)}$$

La convergence de la suite $x^{(k)}$ vers la solution \bar{x} est donné par le proposition suivant :

Proposition 1.6.1 Le choix de la décomposition de A devra obéir aux règles suivantes :



- Proposition 1.6.2**
1. Le rayon spectral $\rho(M^{-1}N)$ doit être strictement inférieur à 1.
 2. La résolution de $Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b$ doit être simple et nécessiter le moins d'opérations possibles
 3. Pour obtenir la meilleure convergence, $\rho(M^{-1}N)$ doit être le plus petit possible.

On voit que la convergence dépend de la décomposition.

1.6.2 Différentes décomposition de A

On écrit la matrice A sous la forme

$$A = D + E + F$$

avec D la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

E la matrice triangulaire inférieure suivante

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

et F la matrice triangulaire supérieure

$$F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous obtiendrons donc la décomposition $A = M - N$ à partir de différents types de regroupement de ces matrices D, E et F .

1.6.3 Méthode de Jacobi

On pose

$$M = D \quad \text{et} \quad N = -(E + F)$$

ainsi, $B = M^{-1}N = D^{-1}(-E - F)$, ce qui implique :

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(-E - F)x^{(k)} + D^{-1}b$$

si on exprime cette relation en fonction des éléments de la matrice A nous avons :

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

1.6.4 Méthode de Gauss-Seidel

Cette méthode utilise

$$M = D + E \quad \text{et} \quad N = -F$$

D'où

$$B = -(D + E)^{-1}F,$$

et alors on a :

$$x^{(k+1)} = -(D + E)^{-1}Fx^{(k)} + (D + E)^{-1}b$$

le calcul de l'inverse de $(D + E)$ peut être évité. Si on écrit $(D + E)x^{(k+1)} = -Fx^{(k)} + b$, on obtient

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k+1)} = - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i,$$

d'où

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

1.6.5 Méthode de relaxation

On donne un paramètre $\omega \in]0, 2[$, appelé facteur de relaxation, et on pose

$$M = \frac{D}{\omega} + E \quad \text{et} \quad N = \left(\frac{1-\omega}{\omega} \right) D - F$$

et par conséquent

$$\left(\frac{D}{\omega} + E \right) x^{(k+1)} = \left(\left(\frac{1-\omega}{\omega} \right) D - F \right) x^{(k)} + b$$

d'où

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \right) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Comme on peut le constater, la méthode de Gauss-Seidel correspond à la méthode de relaxation pour $\omega = 1$.

1.7 Convergence des méthodes itératives

La convergence des méthodes itératives dépend fortement du rayon spectral de A . Nous étudions d'abord les propriétés de certaines matrices et la localisation de leurs valeurs propres.

Définition 1.7.1 Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice. On définit la norme matricielle induite à partir de la norme vectorielle sur \mathbb{R}^n par

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Proposition 1.7.1 Soit A et B deux matrices telles que leur multiplication soit compatible alors on a :

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

pour toute norme induite.

Théoreme 1.7.2 — Gerschgorin-Hadamard. Les valeurs propres de la matrice A appartiennent à la réunion des n disques D_k pour $k = 1, 2, \dots, n$ du plan complexe ($\lambda \in \cup_{k=1}^n D_k$ où D_k , appelé disque de Gerschgorin, est défini par :

$$|z - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{kj}|$$

1.7.1 Cas général

On considère une méthode itérative définie comme :

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donné} \\ x^{(k+1)} & = Cx^{(k)} + D \end{cases}$$

Théoreme 1.7.3 Soit A une matrice carré d'ordre n , pour que $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$, il faut et il suffit que $\rho(A) < 1$.

Théoreme 1.7.4 Si il existe une norme induite telle que $\|C\| < 1$ alors la méthode itérative décrite ci-dessus est convergente quelque soit $x^{(0)}$ et elle converge vers la solution de :

$$(I_d - C)x = D$$

Théoreme 1.7.5 Une condition nécessaire et suffisante de convergence de la méthode ci-dessus est que :

$$\rho(C) < 1$$

R la condition de convergence donnée par le rayon spectral n'est pas dépendante de la norme induite, cependant elle peut être utile car le calcul du rayon spectral peut être difficile.

Cas des matrices à diagonale dominante

Définition 1.7.2 Une matrice est dite à diagonale dominante si :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Théoreme 1.7.6 Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors A est inversible et en outre, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.

Démonstration. si A est une matrice à diagonale strictement dominante, on montre que A est inversible en démontrant que 0 n'est pas une valeur propre (c'est-à-dire $\text{Ker}A = 0$). Posons $B = M^{-1}N$ est soit λ et v tels que $Bv = \lambda v$ avec $v \neq 0$. Puisque l'on s'intéresse à $\rho(B) < 1$, on s'intéresse en fait à la plus grande valeur propre de plus grand module de B . Ainsi, on peut supposer que $\lambda \neq 0$. L'équation $Bv = \lambda v$ devient :

$$\left(M - \frac{1}{\lambda} N \right) v = 0$$

- Pour Jacobi ; l'équation devient :

$$\left(D + \frac{1}{\lambda} E + \frac{1}{\lambda} F \right) v = 0$$

soit $C = D + \frac{1}{\lambda} E + \frac{1}{\lambda} F$. si $|\lambda| \geq 1$, on aurait :

$$|c_{ii}| = |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{\lambda} \right| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |c_{ij}|$$

donc C serait à diagonale strictement dominante et par conséquent inversible. C inversible implique que $Cv = 0$ donc $v = 0$. Or $v \neq 0$, d'où la contradiction et donc on a bien $|\lambda| < 1$. - Pour Gauss-Seidel ; l'équation devient :

$$\left(D + E + \frac{1}{\lambda} F \right) v = 0$$

en posant encore $C = D + E + \frac{1}{\lambda}F$. et en supposant $|\lambda| \geq 1$, on aurait :

$$|c_{ii}| = |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \geq \sum_{j < i} \left| \frac{a_{ij}}{\lambda} \right| + \sum_{j > i} \left| \frac{a_{ij}}{\lambda} \right| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |c_{ij}|$$

et on obtient le même type de contradiction. ■

Cas des matrices symétriques définies positives

Théorème 1.7.7 Si A est une matrice symétrique définie positive, alors les méthodes de Gauss-Seidel et de relaxation pour $(\omega \in]0, 2[)$ convergent.

La convergence de la méthode est d'autant plus rapide que $\rho(M^{-1}N)$ est petit. Or cette matrice $B = M^{-1}N$ dépend de ω . Une étude théorique des valeurs propres de B montre que l'allure de la courbe $\rho(B)$ en fonction de B est décroissante entre 0 et ω_{opt} et croissante entre ω_{opt} et 2. Par ailleurs, on a toujours $1 < \omega_{opt} < 2$. On a donc intérêt à choisir ω le plus proche possible de ω_{opt} .

La méthode de correction

Soit le vecteur reste en x défini comme :

$$r(x) = b - Ax$$

et $\{r^{(k)}\}$ le reste en $\{x^{(k)}\}$. On appelle également l'erreur en k le vecteur

$$e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$$

où \bar{x} est la solution. si on a une approximation $\{x^{(0)}\}$ de x , la relation suivante est vérifiée :

$$Ae^{(0)} = A(x^{(0)} - \bar{x}) = A(x^{(0)}) - b = -r^{(0)}$$

ce qui signifie que $e^{(0)}$ est la solution du système $Ax = -r^{(0)}$ et théoriquement, on a $\bar{x} = x^{(0)} - e^{(0)}$. Pratiquement, en appliquant au système $Ax = -r^{(0)}$ la méthode directe qui nous a fourni $x^{(0)}$, on n'obtient pas directement $e^{(0)}$, mais une approximation $y^{(0)}$ de $e^{(0)}$. Si on pose $x^{(1)} = x^{(0)} - y^{(0)}$, $x^{(1)}$ est une nouvelle approximation de \bar{x} , en itérant les calculs précédents, on obtient :

$$Ae^{(1)} = A(x^{(1)} - \bar{x}) = A(x^{(1)}) - b = -r^{(1)}$$

la résolution du système $Ax = -r^{(1)}$ donnera une approximation $y^{(1)}$ de $e^{(1)}$, et une nouvelle approximation $x^{(2)}$ de \bar{x} :

$$x^{(2)} = x^{(1)} - y^{(1)} = x^{(0)} - y^{(0)} - y^{(1)}$$

Ces calculs peuvent être itérés autant de fois que nécessaire, pour s'arrêter lorsque le reste est suffisamment petit. A la $k^{\text{ième}}$ itération, les relations suivantes sont vérifiées pour $y^{(k-1)}$ approximation de $e^{(k-1)}$:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - y^{(k-1)} = x^{(0)} - \sum_{i=0}^{k-1} y^{(i)}$$

avec $y^{(i)}$ une approximation de $e^{(i)}$, solution de $Ax = -r^{(i)}$ et $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Si nous nous arrêtons lorsque $k = N$, il est nécessaire de résoudre $N+1$ systèmes linéaires : d'abord $Ax = b$, pour obtenir $x^{(0)}$ puis $Ax = -r^{(i)}$ et $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ afin d'obtenir $y^{(i)}$. Une fois la matrice A décomposée (en LU ou Cholesky), il s'agit donc de résoudre les systèmes $LUx = -r^{(i)}$ où $-r^{(i)}$ a été calculé par la relation $r^{(i)} = b - Ax^{(i)}$.

1.8 SERIE D'EXERCICES

Exercice 1.5 Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Par la méthode des approximations successives. Arrêter les calculs dès que :

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < 10^{-2}$$

Exercice 1.6 Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Par la méthode de Seidel. Arrêter les calculs dès que :

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < 10^{-2}$$

Exercice 1.7 Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Par la méthode de relaxation. Faire les calculs avec deux décimales.

Exercice 1.8 Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

Par la méthode de relaxation. Faire les calculs avec quatre décimales.