وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
مركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف-ميلة-
معهد العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

مقياس رياضيات 2 — **سلسلة أعمال الموجهة رقم 4**

التمرين الأول : أحسب المحددات التالية:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

التمرين الثاني : لتكن الجمل التالية:

$$(2)\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}, \quad (1)\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

أكتب الشكل المصفوفي للجمل ثم أوجد الحلول بطريقة كرامر.

التمرين الثالث : لتكن المصفوفة A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. أحسب محدد A ثم أوجد A^{-1}.

2. بإستعمال A^{-1} أوجد حلا للجملة $AX = B$ حيث $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

حل التمرين الأول: لحساب المحدد يمكن إختيار أي سطر مع مراعاة الإشارة و عادة ما نختار السطر الذي يحتوي أكبر عدد من الأصفار.

1.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A_1} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ (+) & (-) & (+) \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - (-4).\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times (2 \times 3 - (-1 \times 6)) - (-4) \times (3 \times 3 - (1 \times (-1))) + 0.((3 \times 6 - 1 \times 2)) \\
&= 24 + 40 + 0 \\
&= 64
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A_2} &= \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times (1 \times 1 - 1 \times 1) - 0 \times (1 \times 1 - 1 \times 0) + 2 \times ((1 \times 1 - 1 \times 0)) \\
&= 0 + 0 + 2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A_3} &= \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times ((-2 \times -1) - (2 \times -3)) - \times((3 \times -1) - (5 \times 2)) - 3 \times ((3 \times -3) \\
&\quad -(-2 \times 5)) \\
&= 16 + 13 + -3 \\
&= 26
\end{aligned}
$$

حل التمرين الثاني:

1. الشكل المصفوفي للجملة (1):

$$\boldsymbol{AX = B}$$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}}_{B}
$$

2. : حل الجملة بإستعمال طريقة كرامر
طريقة كرامر تعتمد على العبارة التالية $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ حيث A_i هي المصفوفة A مع تعويض العمود رقم i بالشعاع B.

ا) نحسب $|A|$:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 26$$

ب) نحسب $|A_1|$:

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 16 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{26} = 1$$

ج) نحسب $|A_2|$:

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -1 \end{vmatrix} = -78 \Rightarrow y = \frac{-78}{26} = -3$$

د) نحسب $|A_3|$:

$$det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 16 \end{vmatrix} = -52 \Rightarrow z = \frac{-52}{26} = -2$$

و منه الحل هو :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. الشكل المصفوفي للجملة (2):

$$AX = B$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}^{B}$$

لحل الجملة نحسب أولا محدد المصفوفة الناتجة:

ا) نحسب $|A_1|$:

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{1} = 1$$

ب) نحسب $|A_2|$:

$$det(A_2)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\0&3&1\end{vmatrix}=1\Rightarrow x_2=\frac{1}{1}=1$$

ج) نحسب $|A_3|$:

$$det(A_3)=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&3\end{vmatrix}=2\Rightarrow x_3=\frac{2}{1}=2$$

و منه الحل هو :

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

حل التمرين الثالث:

1. حساب المحدد ل: A
حسبناه في التمرين السابق $|A|=64\neq 0$ و منه A قابلة للقلب.
إيجاد المقلوب A
إذن يمكن حساب مقلوب A بإستعمال المصفوفة المرافقة و عليه:

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\times C^t$$

لنحسب الآن عناصر المصفوفة C :

$$C_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}6&3\\-4&0\end{vmatrix}=12,\quad C_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}1&3\\2&0\end{vmatrix}=6,\quad C_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix}1&6\\2&-4\end{vmatrix}=-16$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix}2&-1\\-4&0\end{vmatrix}=4,\quad C_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix}3&-1\\2&0\end{vmatrix}=2$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix}3&2\\2&-4\end{vmatrix}=16$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix}2&-1\\6&3\end{vmatrix}=12,\quad C_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix}3&-1\\1&3\end{vmatrix}=-10,\quad C_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix}3&2\\1&6\end{vmatrix}=16$$

إذن $C^t=\begin{pmatrix}12&4&12\\6&2&-10\\-16&16&16\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}.C^t=\frac{1}{64}.\begin{pmatrix}12&4&12\\6&2&-10\\-16&16&16\end{pmatrix}$

2. بإستعمال A^{-1} إيجاد حلا للجملة $A.X=B$ حيث : $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$.

نعلم أن

$$A.X = B \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B$$

وبالتالي نحصل على :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{64}.\begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{16} \\ \frac{-15}{32} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$