Chapitre II : Transformation de Fourier :

1- Transformée de Fourier :

Définition 01 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $f \in L^1(\mathbb{R})$.

On appelle transformée de Fourier de f, la fonction $w \longmapsto \hat{f}(w)$ définie par :

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx \quad , \quad w \in \mathbb{R}.$$

⊛ Cette intégrale est bien définie puisque $|f(x) \cdot e^{-iwx}| = |f(x)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$

⊛ D'autres notations existent dans la littérature :

$$\hat{f} = \mathcal{F} f \quad \text{ou} \quad \hat{f}(w) = \mathcal{F}(f(t))$$

Remarque 1 :

Soulignons ici que certains auteurs adoptent d'autres définitions. Citons par exemple les formules

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x)\, dx \, ;$$

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi wx} f(x)\, dx \, ;$$

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwx} f(x)\, dx \, .$$

Remarque 02 :

La transformée de Fourier n'existe pas toujours. Par exemple ; la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

n'admet pas de transformée de Fourier, car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx$ n'existe pas pour aucune valeur de w.

En effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-iwx}\, dx$$

$$= \lim_{A \to \infty} \int_{0}^{A} e^{-iwx}\, dx$$

$$= \lim_{A \to \infty} \frac{i}{w} \left(e^{-iAw} - 1 \right) \text{ n'existe pas.}$$

Proposition 01 :

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est continue, bornée ($\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$), $\hat{f}(w)$ tend vers 0 quand $w \to \pm\infty$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Preuve :

On a
$$\hat{f}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx \quad , w\in\mathbb{R},$$
la fonction sous le signe intégrale est continue presque partout sur $\mathbb{R}$ et ~~est~~ mesurable pour tout $w\in\mathbb{R}$, En outre, on a
$$|f(x)\,e^{-iwx}|=|f(x)| \; , \forall w\in\mathbb{R}.$$
et puisque $f\in L^1(\mathbb{R})$ alors d'après le théorème de continuité pour les fonctions définies par une intégrale, la fonction $\hat{f}$ est continue.

En plus, on a
$$|\hat{f}(w)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \|f\|_1$$
$$\forall w\in\mathbb{R}.$$

Ce qui montre que $\hat{f}$ est bornée et
$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{w\in\mathbb{R}} |\hat{f}(w)| \leq \|f\|_1 .$$
Il reste à montrer que $\hat{f}(w) \xrightarrow{w\to\mp\infty} 0$.

En effet, on sait que l'espace des fonctions étagées à support borné est dense dans $L^1(\mathbb{R})$

ie pour toute fonction $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $\forall\varepsilon>0$ on peut trouver une fonction φ étagée tq :
$$\|f-\varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{avec } \varphi=\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{[\alpha_{k-1},\alpha_k]}$$
où $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ et $[\alpha_{k-1},\alpha_k]$, $k=1,\dots,n$ sont des intervalles bornés.

Calculons d'abord la transformée de Fourier de φ.
$$\hat{\varphi}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{[\alpha_{k-1},\alpha_k]}\Big) e^{-iwx}\,dx$$
$$=\sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} e^{-iwx}\,dx$$
$$\overset{w\neq 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{w} c_k \left(e^{-iw\alpha_k}-e^{-iw\alpha_{k-1}}\right)$$
$$\Rightarrow |\hat{\varphi}(w)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{|w|}\left(|e^{-iw\alpha_k}|+|e^{-iw\alpha_{k-1}}|\right)$$

et donc

$$|\hat{\varphi}(w)| \leq \frac{2}{|w|} \cdot \sum_{k=1}^{n} |c_k| .$$

d'où $\lim_{w \to \mp\infty} \hat{\varphi}(w) = 0$

i.e pour $w \to \pm\infty$, on a $|\hat{\varphi}(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Par conséquent

$$|\hat{f}(w)| \leq |\hat{f}(w) - \hat{\varphi}(w)| + |\hat{\varphi}(w)|$$

$$\leq \|f - \varphi\|_1 + |\hat{f}(w)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon , \quad w \to \mp\infty$$

i.e $\lim_{w \to \mp\infty} \hat{f}(w) = 0$.

Exemple 1: soit la fonction porte définie par:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq T. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$f \in L^2(\mathbb{R})$ donc la transformée de Fourier existe est donnée par:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

$$= \int_0^T e^{-iwt} dt$$

$$= \left[\frac{e^{-iwt}}{-iw} \right]_0^T = \frac{e^{-iwT} - 1}{-iw} = \frac{ie^{-iwT} - i}{w} .$$

Remarques 03:

ⓐ Si f est réelle et paire alors la transformée de Fourier de f est une fonction réelle et paire est donnée par:

$$\hat{f}(w) = 2 \cdot \int_0^{+\infty} f(x) \cos(wt) .$$

(appelée cosinus-transformée de Fourier)

[Resp. si f est une fonction imaginaire et paire alors $\hat{f}(\alpha)$ sera imaginaire et paire]

ⓑ Si f est une fonction réelle et impaire, alors la transformée de Fourier de f est imaginaire et paire et donnée par:

$$\hat{f}(w) = 2i \int_0^{\infty} f(t) \sin(wt) dt .$$

(appelée sinus-transformée de Fourier)

[Resp. si f est imaginaire et impaire alors $F(\alpha)$ sera réelle et paire].

2- Propriétés de la transformation de Fourier :

Propriété 01 (Linéarité)

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors :

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g]$$

$$\widehat{\alpha f + \beta g}(w) = \alpha . \hat{f}(w) + \beta \hat{g}(w)$$

Preuve : la linéarité de l'intégrale.

Propriété 02 : (Translation)

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-iwa} \hat{f}(w).$$

Preuve : On a :

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) e^{-iwx} dx$$

$$\overset{u=x-a}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iw(u+a)} du$$

$$= e^{-iwa} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iwu} du$$

$$= e^{-iwa} \hat{f}(w)$$

Propriété 03 (Fonction modulée)

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $w_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathcal{F}[e^{iw_0 x} f(x)] = \hat{f}(w - w_0)$$

Preuve : On a

$$\mathcal{F}[e^{iw_0 x} f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iw_0 x} f(x) e^{-iwx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(w-w_0)x} dx$$

$$= \hat{f}(w - w_0).$$

Propriété 04 (Changement d'échelle) :

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$$

Preuve :

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-iwx} dx$$

$$\overset{u=ax}{=\!=} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iw\frac{u}{a}} du$$

$$= \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right).$$

Propriété 05. (Conjugaison complexe)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathcal{F}[\bar{f}(x)] = \overline{\hat{f}}(-w)$$

Preuve : On a

$$\mathcal{F}[\bar{f}(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x)\, e^{-iwx}\, dx$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iwx}\, dx}$$

$$= \overline{\hat{f}}(-w)$$

Proposition 02 :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Supposons que f est dérivable et que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathcal{F}[f'(x)] = iw\,\mathcal{F}[f(x)] = iw\,\hat{f}(w)$$

Si en outre, f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (iw)^n\,\hat{f}(w)$$

Preuve : On a

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-iwx}\, dx$$

$$= f(x)\, e^{-iwx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + iw\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx$$

On sait que si une fonction intégrable admet une limite, alors cette limite est nulle. Par hypothèse, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et il suffit de montrer que $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x)$ existe. Notons que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$$

Comme f' est intégrable, alors $f(x)$ a une limite finie quand $x \to \mp\infty$.

Cette limite ne peut être que zéro car sinon f ne serait pas intégrable. Donc

$$\mathcal{F}[f'(x)] = +iw\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx = +iw\,\hat{f}(w).$$

Plus généralement, puisque f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n alors en répétant ce qui précède, on obtient

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (iw)^n \cdot \hat{f}(w).$$

Le résultat suivant montre que, si la fonction f est dérivable, à dérivées dans $L^1(\mathbb{R})$, alors sa transformée de Fourier $\hat{f}$ décroit rapidement à l'infini.

Proposition 03:

Si f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$|\hat{f}(w)| \leq \frac{C}{|w|^n}, \quad C = \text{constante}$$

ce qui montre que plus n est grand, plus $\hat{f}$ décroit rapidement à l'infini.

Preuve: On a

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (iw)^n \hat{f}(w)$$

alors: $$|\hat{f}(w)| \leq \frac{1}{|w|^n} \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(n)}(x)|\,dx$$

$$\leq \frac{C}{|w|^n} \quad \text{où } C = \|f^{(n)}\|_1$$

Proposition 4: (Dérivation de $\hat{f}$)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est dérivable et l'on a

$$\frac{d}{dw}\hat{f}(w) = \mathcal{F}[-ix f(x)]$$

Si en plus, $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\frac{d^n}{dw^n}\hat{f}(w) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)]$$

Preuve: On a

$$\frac{d}{dw}\hat{f}(w) = \frac{d}{dw}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\,dx$$

Comme $|-ix f(x)| = |x f(x)|$ et que par hypothèse $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale

$$\frac{d}{dw}\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ix f(x)\, e^{-iwx}\,dx$$

$$= \mathcal{F}[-ix f(x)].$$

Plus généralement, si $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, on obtient en répétant le processus précédent la relation

$$\frac{d^n}{dw^n}\hat{f}(w) = \mathcal{F}\left[(-ix)^n f(x)\right].$$

Proposition 05:

Sous les hypothèses de la proposition 4, On a

$$\left|\frac{d^n}{dw^n}\hat{f}(w)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x^n f(x)|\, dx$$

Ce qui signifie que plus f décroit rapidement à l'infini, plus n est grand, plus $\hat{f}$ est dérivable et ses dérivées sont bornées.

Proposition 06:

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{F}\left[(f*g)(x)\right] = \mathcal{F}\left[f(x)\right]\cdot \mathcal{F}\left[g(x)\right].$$

Autrement dit, la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit ordinaire des transformées de Fourier de chaque facteur.

Preuve: On a

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\mathcal{F}\left[(f*g)(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)\, e^{-iwx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt\right) e^{-iwx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt}\cdot g(x-t)\, e^{-iw(x-t)}\, dt\, dx$$

Posons $u = t$ et $v = x - t$. D'après le théorème du changement des variables, on a

$$\mathcal{F}\left[(f*g)(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-iwu}\, g(v)\, e^{-iwv}\, |J|\, du\, dv$$

avec

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(J est le jacobien du changement des variables)

et donc:

$$\mathcal{F}\left[(f*g)x\right] = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-iwx}\, dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(v)\, e^{-iwv}\, dv\right)$$

$$= \mathcal{F}\left[f(x)\right]\cdot \mathcal{F}\left[g(x)\right].$$

3- Transformée inverse de Fourier:

Définition 02:

La transformée inverse de Fourier, notée $\mathcal{F}^{-1}$, telle que si $\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f(x))$, alors $f(x)$ et la transformée inverse de $\hat{f}(w)$. Autrement dit, on a l'équivalence:

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f(x)) \iff f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(w)).$$

La transformée inverse est définie par:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(w)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\, e^{iwx}\, dw.$$

⊛ plus généralement, si f n'est pas continue en x, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)\, e^{iwx}\, dw = \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$$

où $f(x+0) = \lim\limits_{h \geq 0} f(x+h)$, $f(x-0) = \lim\limits_{h \leq 0} f(x+h)$

(La même chose si f est continue par morceaux).

Proposition 07:

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, si on pose

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)\, e^{iwx}\, dw$$

alors: $g \in C_0^0(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues qui s'annulent à l'infini et $f(x) = g(x)$ p.p

Corollaire 01:

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors:

$$\hat{f} = \hat{g} \iff f = g \text{ p.p.}$$

Exemple:

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On a $f \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\hat{f}(w)$ existe

$$\hat{f}(w) = \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-iwx}\, dx$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-(1+iw)x}\, dx$$
$$= \frac{1}{1+iw}$$

D'après la définition 02, et comme f n'est pas continue au pt $x=0$, alors:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+iw}\, dw = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1}{2}$$

i.e $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{1+iw} = \pi$

(cette intégrale c'est une valeur principale de Chachy. car $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w}{1+w^2}\, dw$ diverge, $\frac{-w}{1+w^2}$ = p. Imaginaire de $\frac{1}{1+iw}$.)