Chapitre 6

Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes indirectes.

6.1Introduction:

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les méthodes directes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires sont efficaces pour obtenir une solution exacte. Par contre, si le système est d'ordre plus élevé, l'obtention de la solution par ces méthodes nécessite un grand nombre d'opérations.

Les méthodes indirectes (méthodes itératives) sont très faciles pour résoudre les systèmes d'équations d'ordre plus élevé. Ce chapitre donne le principe de ces méthodes et illustre l'utilisation de quelques méthodes itératives pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

6.2 Principe des méthodes itératives :

Le principe des méthodes itératives est de construire une suite de vecteur $(x)^{(\hbar)}_{\hbar=1,\ldots\ldots,n}$ qui tend vers un vecteur $\bar{x}$ $s$olution exacte de $Ax = b$

souvent, on part d'une approximation $x^{(0)}$ de x.

$x^{(0)} = (x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots \ldots \ldots .. x_4^{(0)})^t$

6.2.1Procédure

Au départ, le système que l'on cherche à résoudre est donné par ;

$Ax = b$ ……………………….(6.1)

on décompose la matrice A en deux matrice comme suivant :

$A = M - N$

Par remplacement le système s'écrit

M$x = Nx$+b … … … … … … … (6.2)

à partir du vecteur initial $x^{(0)}$.

Ou obtient la solution :

$$x^{(1)} = M^{-1}N\, x^{(0)} + M^{-1}b \dots\dots\dots\dots(6.3)$$

Cette étape est dite la première itération.

On utilise le vecteur $x^{(1)}$ comme une solution initiale pour trouver

$$x^{(2)} = M^{-1}N\, x^{(1)} + M^{-1}b \dots\dots\dots(6.4),$$

Donc, c'est la deuxième itération.

Et ainsi de suite jusqu'à l'étape $\hbar$ où la solution approximative est donnée par :

$$x^{(\hbar+1)} = M^{-1}N\, x^{(\hbar)} + M^{-1}b \dots\dots\dots(6.5)$$

6.2.2Décomposition de la matrice A :

$d_{ii} = -a_{ii} \quad i = \overline{1,n}$ D diagonal de la matrice

$l_{ij} = -a_{ij} \quad i > j$

L matrice triangulaire supérieure

$l_{ij} = 0 \quad i \leq j$

$u_{ij} = -a_{ij}$ U matrice triangulaire inférieure

$u_{ij} = 0 \quad j \leq i$

6.3 Méthode de Jaccobi :

6.3.1Principe de la méthode de Jaccobi

Considérons le système

Ax=B

Suivons les étapes mentionnées dans le paragraphe précédent,

A=M-N

Dans ce cas

$$M=D \quad \text{et} \quad N=L+U$$

$$x^{(\hbar+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(\hbar)} + D^{-1}b$$

Alors la relation itérative de Jacobi est la suivante

$$\begin{cases} x_1^{(\hbar+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(\hbar)} - a_{13}x_3^{(\hbar)} - \cdots \dots \dots . -a_{1n} \ x_n^{(\hbar)}/a_{11} \\ x_2^{(\hbar+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(\hbar)} - a_{23}x_3^{(\hbar)} - \cdots \dots \dots . -a_{2n} \ x_n^{(\hbar)}/a_{22} \\ \\ x_n^{(\hbar+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(\hbar)} - a_{n2}x_2^{(\hbar)} - \cdots \dots \dots . -a_{nn-1} \ x_{n-1}^{(\hbar)}/a_{nn} \end{cases}$$

Avec $a_{ii} \neq 0$

6.2.2 Condition de la convergence

La condition suffisante pour la convergence de cette méthode est

$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad i = \overline{1.n}$ (diagonale dominante)

Ou arrive à la solution lorsqu'on obtient :

$\left|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}\right| \leq \varepsilon.$ (Erreur obsolue)

Ou bien lorsque :

$\frac{\left|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}\right|}{\left|x_i^{(n)}\right|} \leq \varepsilon.$ (Erreur relative précision)

Exemple :
Résoudre le système suivant par la méthode de Jaccobi

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{2} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{-x_1^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)}}{3} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{-3x_1^{(k-1)^3} - 2x_2^{(k-1)} - 4}{5} \end{cases}$$

On propose la solution initiale
$x^{(0)} = (0.0.0)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.5 \\ x_2^{(1)} = 0 \\ x_3^{(1)} = 0.8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = 0.9 \\ x_2^{(2)} = 1.9 \\ x_3^{(2)} = 1.1 \end{cases}$$

6.4 Méthode de Gauss-Seidel :

Dans ce cas
M=D-L
$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$
(D-L) $x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$

(D-L) $x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$

$x^{k+1} = D^{-1}Lx^{(k+1)} + d^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b$

Alors la relation itérative de Gauss-Seidel est la suivante

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots \ldots \ldots . -a_{1n}\ x_n^{(k)}/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots \ldots \ldots . -a_{2n}\ x_n^{(k)}/a_{22} \\ \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots \ldots \ldots . -a_{nn-1}\ x_{n-1}^{(k+1)}/a_{nn} \end{cases}$$

Avec $a_{ii} \neq 0$

Remarque :

Cette méthode à la même condition de convergence que la méthode de Jaccobi.

Exemple

La solution du système précédent par la méthode de Gauss-séidel est:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)} - 1}{2} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{-x_1^{(k)} - 3x_3^{(k-1)}}{3} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{-3x_1^{(k)^3} - 2x_2^{(k)} - 4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -1/2 \\ x_2^{(1)} = 1/6 \\ x_3^{(1)} = 1/6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = -1/2 \\ x_2^{(2)} = 0 \\ x_3^{(2)} = -1/2 \end{cases}$$