Chapitre 5

Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes directes

5.1 Introduction :

La résolution des systèmes d'équations linéaires modélisent la majorité des phénomènes physiques tels que :

- Tension dans une structure
- Flot dans un réseau hydraulique
- Mélange de produits chimiques
- Vibration d'un système mécanique
- Élasticité
- Potentiel dans un circuit électrique
- Transfert de chaleur
- Réduction d'équations différentielles.

5.2 Généralités sur les matrices :

5.2.1 Définition:

Une matrice d'éléments de IR est un tableau à deux dimensions composé de m lignes et n colonnes. L'ensemble des matrices de IR de dimension m,n est noté $M_{m,n}$ et forme un espace vectoriel sur IR.

5.2.2 Propriétés :

Soient A et B deux matrices :

- $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m,n}$ $1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$
- $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m,n}$
- On appelle transposé de A la matrice A^t telle que :

  $[A^t]_{ij} = a_{ji} \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$

- Soient $A \in M_{m,n}$ et $B \in M_{n,p}$ alors le produit $C \in M_{m,p}$ est donné par la formule suivante. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\ 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$
- $AB \neq BA$
- $A(BC) = (AB)C = ABC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- On dit qu' une matrice $A \in M_{n,n}$ est inversible si et seulement si
  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- Une matrice A est dite symétrique si $A^t = A$ (autrement dit si $a_{i\,j} = a_{j\,i}$) et antisymétrique si $A^t = -A$
- On dit que A est orthogonale si : $A^{-1} = A^t$
- Une matrice A est dite triangulaire inférieure si $a_{i\,j} = 0$ pour $j > i$
- Une matrice B est dite triangulaire supérieure si $b_{i\,j} = 0$ pour $i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ a_{n\,1} & & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0\ b_{n\,n} \end{pmatrix}$$

5.3 Systèmes d'équations:

On appelle système de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n,$ la famille d'équations.

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots.. + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Que l'on peut mettre sous la forme $Ax = b$

Où: $A \in M_{mn}(IR)$ est une matrice donnée par ses éléments $(a_{i\,j})$

$1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ et x le vecteur inconnu de composantes $(x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n)$

On va étudier dans ce chapitre les systèmes d'équations linéaires dont le nombre d'équations est égal à ceux d'inconnues et dont le déterminant est non nul. Un système d'équations linéaire de n équations avec n inconnues s'écrit alors :

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\ldots\ldots\ldots..+a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.1)$$

Ce système peut s'écrit sous la forme A $x =$ b ou sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ & . & \\ a_{n1}a_{n2} & \ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

5.4Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes directes :

- Les méthodes directes : celles où on obtient la valeur exacte de la solution après un nombre fini d'opérations,
- Les méthodes itératives (indirectes) : elles consistent à construire une suite de vecteurs x^k convergeant vers la solution x cherchée. On s'arrête bien sûr au bout d'un nombre fini n d'itérations choisi pour que x^n soit suffisamment voisin de x.

5.4.1 Méthode de Gauss :

La méthode de gauss consiste à transformer le système A $x =$ b à un système triangulaire supérieur équivalent à l'aide d'un algorithme dite algorithme d'élimination.

On va appliquer les opérations suivantes pour obtenir un système triangulaire :

- Une équation peut être remplacée par cette même équation à la quelle en ajoute ou on retranche un certains nombre de fois une autre ligne.

- La multiplication d'une équation par un constant non nulle.

- La permutation de deux lignes ou deux colonnes.

5.4.1.1Résolution d'un système triangulaire supérieur :

Si le système A $x = $ b est triangulaire supérieure, il a la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1\,n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2\,n}\,x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{n\,n}\;\; x_n = b_n \end{cases}$$

5.4.1.2Théorème (unicité de la solution):

Soit le système triangulaire supérieur A $x =$ b où $A \in M_{mn}(IR)$ est une matrice carrée et $b \in IR^n$, si $a_{k\,k} \neq 0 \forall\, k \in [1, n]$.

Alors le système A $x =$ b admet une solution unique x donnée par

$$\boldsymbol{x_i = \frac{1}{a_{i\,i}}\left[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i\,j}x_j\right] \quad i = \overline{n, 1}}$$

Si la matrice A est triangulaire inférieur le système A X = b s'écrit comme suivant :

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j = b_i \qquad\qquad i = \overline{1, n}$$

$$a_{ij} = 0 \qquad si\; j > i$$

Alors :

$$\boldsymbol{x_i = \frac{1}{a_{i\,i}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i\,j}x_j\right] \; i = \overline{1, n}}$$

5.4.1.3 Etapes de la méthode de Gauss

Principe : transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure.

Dans le système (5.1) on regroupe A et b dans une seule matrice $[A\!:b]$.

et $[A\!:b] \xrightarrow{\text{tran aformation}} \left[A^{(n)}\!:b^{(n)}\right]\; Ou\; A^{(n)}$est une matrice triangulaire supérieure équivalente à A.

où $A^{(1)}x = b^{(1)} \dots\dots\dots. (2)$

Avec :$A^{(1)} = \left(a_{ij}^{(1)}\right) = A \quad , \quad b^{(1)} = b_j^{(1)} = b$

$$cest - \text{à} - dire: [A:b] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} a_{21}^{(1)} \dots\dots\dots a_{1n}^{(1)}.\, b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} a_{22}^{(1)} \dots\dots\dots a_{2n}^{(1)}.\, b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}^{(1)} a_{n2}^{(1)} \dots\dots\dots a_{nn}^{(1)}.\, b_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \\ \\ L_n^{(1)} \end{matrix}$$

Après l'élimination de Gauss on obtient la matrice

$$\left[A^{(n)}: b^{(n)}\right] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} a_{12}^{(n)} \dots\dots\dots a_{1n}^{(n)}.\, b_1^{(n)} \\ 0 \quad a_{22}^{(n)} \dots\dots\dots a_{2n}^{(n)}.\, b_2^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad a_{nn}^{(1)}.\, b_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(n)} \\ L_2^{(n)} \\ \\ \\ L_n^{(n)} \end{matrix}$$

Avec $L_i^{(j)}$ représente la ligne *i* à l'étape *j*.

Enfin on résout le système $A^{(n)}x = b^{(n)}$dont *x* est la solution exacte du système A x =b.

On procède de la manière suivante :

Etape1 : On pose $A = A^{(1)} \ et\ b = b^{(1)}$

Si ${a_{11}}^{(1)} \neq 0$ on fait les opérations suivantes :

L₁est maintenue$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \dfrac{{a_{i1}}^{(1)}}{{a_{11}}^{(1)}} L_1^{(1)} \end{cases}$

On obtient alors :

$$\left[A^{(2)}\colon b^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)}\, a_{12}^{(2)} \;\dots\dots\dots\; a_{1n}^{(2)}.\, b_1^{(2)} \\ 0 \quad a_{22}^{(2)} \;\dots\dots\dots\; a_{2n}^{(2)}.\, b_2^{(2)} \\ 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \quad a_{n\,2}^{(2)} \qquad\qquad a_{nn}^{(2)}.\, b_n^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ \\ \\ L_n^{(2)} \end{matrix}$$

Et ainsi de suite :

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \end{cases}$$

Résolution de $\boldsymbol{A^{(n)}x = b^{(n)}}$

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{(n)}\, x = b^{(n)} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}^{(n)} x_1 + a_{12}^{(n)} x_2 + \cdots \dots\dots .+a_{1n}^{(n)} x_n = b_1^n \\ \cdots\; \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^n \end{cases}$$

On commence par déterminer x_n puis x_{n-1}...(résolution par retour en arrière).

Exemple :

Trouver la solution du système suivant par la méthode de gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\mathrm{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -3 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

L'étape 1 : élimination de x_1

$L_2^{(2)} \longrightarrow L_2^{(1)} - 2L_1^{(1)}$

$L_3^{(2)} \longrightarrow L_3^{(1)} - 3L_1^{(1)}$

$$\mathrm{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & +3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -3 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

L'étape 2 : élimination de x_2 :

$$L_3^{(3)} \longrightarrow L_3^{(2)} - \left(\frac{-7}{-4}\right) L_2^{(2)}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & +3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \vdots & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

On remplace inversement on obtient

$$\frac{15}{2} x_3 = \frac{15}{2} \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-4\, x_2 - 6x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.4.2 Méthode de Cholesky :

Pour résoudre un système d'équation linéaire A x =b il faut que la matrice A soit symétrique définie positive.

5.3.1.Définition :

Une matrice est dite définie positive si et seulement si pour tout

$$x \in IR^n \neq 0 : \;\; x^t A x > 0$$

Condition suffisante pour que $A = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \;\dots\dots\dots\; a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \;\dots\dots\dots\; a_{2n} \\ . \\ a_{n1} a_{n2} \;\dots\dots\dots\; a_{nn} \end{bmatrix}$

A est définie positive si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs

(det $A_{(k)_{1 \leq k \leq n}} > 0$) c'est à dire :

$a_{11} > 0$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

.

.

.

det $A > 0$

5.3.2 Décomposition de la matrice A :

Une matrice A symétrique, définie positive si et seulement s'il existe une matrice L triangulaire inférieure inversible telle que $A = L\,L^t$

5.3.3 Algorithme :

Soit A une matrice symétrique, définie positive pour résoudre

le système $Ax = b$ il faut résoudre :

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

Construire la matrice $L = (l_{i\,j})$triangulaire inferieure telle que

$A = L\,L^t$ où $A = (a_{\,ij})$ $\quad et \quad a_{\,ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{i\,k}\,\ell_{j\,k} \qquad j \leq i$

Donc : $a_{11} = \ell_{11}^{\,2} \Rightarrow \ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$

et $a_{i1} = \ell_{i1}\ell_{11} \Rightarrow \ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{\ell_{11}}\overline{i = 2, n}$

La construction de la matrice L se fait colonne par colonne

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{\ell-1} \ell_{kj}^2}$$

Et : $a_{ik} = \sum_{j=1}^{k} \ell_{ij}\ell_{kj} = \ell_{ik}\ell_{kk} + \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij}\ \ell_{kj}$

Donc : $\ell_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij}\ \ell_{kj})/\ell_{kk}$

Exemple 1:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$x^t A\ x = (x_1, x_2).\begin{pmatrix} x_1 + & 2x_2 \\ 2x_1 + & 8x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2)^2 + 4{x_2}^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}\ \ x = 0$

Alors A est définie positive.

Exemple 2 :

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 15 & 7 & 42 \end{bmatrix}$

Et le vecteur $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$

Condition de convergence (méthode de Colesky) ⇒A symétrique définie positive.

- A est symétrique
- Est-ce- que A est définie positive

$\Delta_1 = 9 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 9 = 36 > 0$

$$\Delta_3 = \det A = 9\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 42 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 15 & 42 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 7 \end{vmatrix} = 9(161) - 3(21) + 15(54)$$

$$= 1449 - 63 - 810 = 576 > 0$$

Alors A est symétrique définie positive.

Décomposition de A :

$$A = L\,L^t = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ell_{11}^2 & \ell_{11}\ell_{21} & \ell_{11}\ell_{31} \\ \ell_{21}\ell_{11} & {\ell_{21}}^2 + {\ell_{22}}^2 & \ell_{21}\ell_{31} + \ell_{22}\ell_{32} \\ \ell_{31}\ell_{11} & \ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} & \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 \end{bmatrix}$$

La 1ère colonne :

$\ell_{11}^2 = 9 \Rightarrow \ell_{11} = 3$

$\ell_{21}\ell_{11} = 3 \Rightarrow \ell_{21} = 1$

$\ell_{31}\ell_{11} = 15 \Rightarrow \ell_{31} = 5$

La 2ème colonne :

$\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = 5 \Rightarrow \ell_{22} = 2$

$\ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} = 7 \Rightarrow \ell_{32} = 1$

La 3ème colonne :

$\ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = 42 \quad \ell_{33} = 4$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

$$L^t x = y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Enfin $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Remarque :

On $a\ A_{k} = L_{k} L_{k}^{t}\ o$ù L_{k}sont les matrice composées des k premières lignes et k premières colonnes de A et de L

det $A_{k} = (l_{11}\ .\, l_{22} .\, l_{33} \dots \dots \dots \dots \dots l_{kk})^2 = l_{11}^2 .\, l_{22}^2 .\, l_{33}^2 \dots \dots \dots \dots . .\, l_{kk}^2$>0 est symétrique définie positive).

- La méthode de Colesky permet de calculer det A par :det $A = \prod_{i=1}^{n} \ell_{ii}^2$.

5.4.3 Méthode de Crout-Dolitle ou LU

Cette méthode consiste à factoriser la matrice **A** pleine en deux matrices triangulaires ***L*** et ***U***, tel que ***L*** est triangulaire inférieure et ***U*** est triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont égaux à l'unité (u_{ii} = 1).

On a donc A x =b et A=LU donc LU x = b, on pose U x =y (y vecteur inconnu), cela donne :

$$\begin{cases} Ly = B \\ Ux = y \end{cases}$$

Le système Ax=b est décomposé en deux systèmes triangulaires faciles à résoudre. Le système à matrice triangulaire supérieure et résolue par substitution directe, celui à matrice triangulaire inférieure par substitution inverse.

5.4.3.1 Détermination des matrices L et U

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix} 1\; u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments de chaque matrice sont donnés par :

$l_{ki} = a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj}\, u_{ji}$

Avec :$i=2,3,\ldots\ldots.,n$ et $k=i,i+1,\ldots\ldots,n$

$$u_{ik} = \frac{\left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{jk}\right)}{l_{ii}}$$

Exemple :

Soit $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ et $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

On applique l'algorithme de Crout et Doolittle pour résoudre le système AX=b.

On cherche $L=\begin{bmatrix} l_{12} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$ et $U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tel que A=LU

-On identifie la première colonne de A et la première colonne de LU, cela permet d'obtenir la première colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ -2 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

– On compare la première ligne de A avec la première ligne de LU, cela permet d'obtenir la première ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ -2 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

– On compare la deuxième colonne de A avec la deuxième colonne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

– On compare la deuxième ligne de A avec la deuxième ligne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

-On compare la troisième colonne de A avec la troisième colonne de LU, cela permet d'obtenir la troisième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Puis on remplace dans

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = Y \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$